СЕТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИЛЬНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Ершова Т.Я.

МГУ им. М.В.Ломоносова, ф-т ВМК, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр.52, +7(495)9391120, ersh@cs.msu.ru

Рассматривается следующая задача с достаточно гладкой правой частью

$$\varepsilon u'''(x) + r\, u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad \varepsilon \in (0,1], \quad r > 0,$$

$$u(0) = g_1, \quad u(1) = g_2, \quad u'(1) = g_3.$$

Решение этой задачи имеет сильный пограничный слой вблизи точки $x = 0$, т.е. производная решения в этой точке неограничена при $\varepsilon \to 0$, что вызывает сложности при получении оценок точности приближенного решения. Задача хорошо исследована для уравнений второго и четвертого порядков и для уравнения третьего порядка в том случае, когда у решения слабый пограничный слой [1].

В данной работе уточнена разностная схема, аппроксимирующая исходное дифференциальное уравнение, и доказано, что решение соответствующей разностной задачи на кусочно-равномерной сетке Шишкина, сгущающейся в пограничном слое, сходится равномерно по малому параметру к решению исходной задачи в равномерной сеточной норме почти с первым порядком.

Для доказательства этого утверждения разностное уравнение путём суммирования преобразуется в разностное уравнение второго порядка, для которого установлена справедливость аналога принципа максимума. Показано, что функция Грина задачи, поставленной для преобразованного уравнения второго порядка, положительна и ограничена, что позволяет получить оценку точности решения в равномерной сеточной норме через норму L_1^h просуммированной погрешности аппроксимации. При вычислении погрешности аппроксимации исходного разностного уравнения используется известная декомпозиция решения дифференциальной задачи и оценки производных входящих в нее функций.

Численное исследование подтверждает теоретически полученный результат.

Литература.

1. Roos H.-G., Teofanov L., Uzelac Z. Uniformly convergent difference schemes for a singularly perturbed third order boundary value problem. Applied Numerical Mathematics. 96, (2015), Стр. 108-117.