МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ВРАЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И НАХОЖДЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Сорокин П.Н., Ченцова Н.Н.[1]

ФГУ Федеральный научный центр научно-исследовательский институт системных исследований РАН (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН), s_p_n_1974@bk.ru

[1]МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический ф-т, nataly.chentsova@gmail.com

Светлой памяти Марины Петровны Дорофеевой посвящается

Определение. Пусть заданы $n \in N^+$, квадратная матрица $A^{(n)} \in R^{n\times n}$ порядка n с матричными элементами $(A^{(n)})_{i,\,j} \in R$ с индексами $i,j=\overline{1,n}$, вектора-столбцы $x^{(n)}, b^{(n)} \in R^n$ с координатами $(x^{(n)})_i, (b^{(n)})_i \in R$ с индексами $i=\overline{1,n}$. Решаем систему линейных уравнений:

$$\sum_{1\le j\le n}(A^{(n)})_{i,\,j}\cdot(x^{(n)})_j=(b^{(n)})_i,\quad i=\overline{1,n} \tag{1}$$

модифицированным методом вращений, состоящем из $n-1$ шагов. Опишем k-ый шаг для $k=\overline{1,n-1}$. Пусть $s\in N^+, k\le s\le n$ – минимальный номер строки, в которой стоит $(A_{k-1}^{(n)})_{sk}$ – максимальный по модулю элемент в k-ом столбце матрицы $A_{k-1}^{(n)}$, начиная с k-ой строки (при $k=1$ в исходной матрице $A^{(n)}$). Если $(A_{k-1}^{(n)})_{sk}=0$, то алгоритм заканчивает работу с диагностикой: “Матрица $A^{(n)}$ вырождена”, иначе выполняются присвоения $A_k^{(n)}=A_{k-1}^{(n)}$, $b_k^{(n)}=b_{k-1}^{(n)}$, затем меняются местами s-ая и k-ая строки матрицы $A_k^{(n)}$, а у вектора $b_k^{(n)}$ меняются s-ая и k-ая координаты. Вектору $a_k^{(n)}$ сначала присвоим нулевой вектор, а затем – k-ый столбец матрицы $A_k^{(n)}$, начав с k-ой строки:

$$a_k^{(n)}=(0,..,0,(A_k^{(n)})_{k,k},...,(A_k^{(n)})_{n,k})^t.$$

Проверим коллинеарен ли он базисному вектору $e_k^{(n)}=(0,..,0,1,0,...,0)^t$ (единица стоит на k-ом месте), т.е. выполнено ли условие: $|(a_k^{(n)},e_k^{(n)})|=|a_k^{(n)}|\cdot|e_k^{(n)}|$. Если коллинеарен, то переходим к $k+1$ шагу, иначе, используя лемму, заменяем каждый столбец матрицы $A_k^{(n)}$ и вектор $b_k^{(n)}$ на его $T_k^{(n)}$-образ, где поворот $T_k^{(n)}$ переводит вектор $(a_k^{(n)}/|a_k^{(n)}|)$ в вектор $(e_k^{(n)}/|e_k^{(n)}|)$. Описание k-го шага окончено. Заметим, что преобразование $T_k^{(n)}$ не изменяет первые $k-1$ столбцов и первые $k-1$ строк матрицы $A_k^{(n)}$. Последовательно выполнив $n-1$ шагов, получаем верхнюю треугольную матрицу $A_{n-1}^{(n)}$ и правую часть $b_{n-1}^{(n)}$. Полученную систему решим обратным ходом метода Гаусса.

Алгоритм для обращения невырожденной матрицы $A^{(n)}$ использует теорему о том, что j-ый столбец обратной матрицы является решением системы (1) с правой частью $b^{(n)}=e_j^{(n)}$. Все n систем можно решать одновременно, задав вместо вектора $b^{(n)}$ единичную матрицу $I^{(n)}$.

Теорема. Пусть в дополнение к условиям определения матрица $A^{(n)}$ не вырождена. Тогда после каждого k-го шага $(1\le k\le n-1)$ модифицированного метода вращений получается система линейных уравнений

$$\sum_{1\le j\le n}(A_k^{(n)})_{i,\,j}\cdot(x^{(n)})_j=(b_k^{(n)})_i,\quad i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

эквивалентная системе линейных уравнений (1). При $k=n-1$ матрица $A_{n-1}^{(n)}$ – верхняя треугольная и (2) решается обратным ходом метода Гаусса.