ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ - СКОРОСТИ В УРАВНЕНИЯХ НАВЬЕ-СТОКСА

Евстигнеев Н.М.

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, лаб.11-3 "Хаотические динамические системы", с.н.с, 117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 9. 8(495)998-7683, evstigneevnm@yandex.ru

Рассматривается система уравнений Навье-Стокса:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \int_\Omega p = 0, \tag{1}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с краем $\partial\Omega$, единичными нормальным $\mathbf{n}$ и тангенциальным τ векторами к $\partial\Omega$. Для нахождения давления в работе [1] предложен метод введения фиктивных переменных $\mathbf{a}, \varphi | \mathbf{u} = \mathbf{a} + \Delta\varphi$. Если φ такое, что $\partial_t \varphi - \nu\Delta\varphi = -p$, то:

$$\partial_t \mathbf{a} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{a} = \nu\Delta\mathbf{a}, \nabla \cdot \mathbf{a} = -\Delta\varphi, (\mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0, \partial_{\mathbf{n}}\varphi = 0, (\mathbf{a}, \tau) = -\partial_\tau \varphi. \tag{2}$$

Проблема заключается в краевых условиях (2), которое не определено на угловых точках Ω и вносит значительную погрешность.

Предлагается ввести слои по времени $()^n$, шаг по времени δt и замены $\mathbf{b}^{n+1} = \mathbf{a}^{n+1} + \Delta\varphi^n$, $q^{n+1} = \Delta\varphi^{n+1}, r^{n+1} = \varphi^{n+1} - \varphi^n$. Тогда имеем следующую схему расщепления:

$$\begin{aligned} 1.(\delta t)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{u}^n) + (\mathbf{u}^n, \nabla)\mathbf{b} - \nu\Delta\mathbf{b} + \nabla q^n = \mathbf{0}, \\ 2.\Delta r^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{b}, \\ 3.q^{n+1} = q^n - \nabla \cdot \mathbf{b}, \\ 4.\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{b} + \nabla r^{n+1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где для увеличения точности можно выполнить итерации по шагам 2,3,4. Введенные замены имеют тривиальные граничные условия $\mathbf{b}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$, $\partial_{\mathbf{n}} q = 0$. Доказывается сходимость итераций, устойчивость и порядок аппроксимации для различных вариантов метода Галеркина на сплайнах и МКЭ.

Литература.

1. В.И. Оселедец. О Новой Форме Записи Уравнения Навье - Стокса. Гамильтонов Формализм.//УМН, том 44, выпуск 3(267), 169–170, 1989.