ДВОЙСТВЕННОСТЬ РЯДА ТЕЙЛОРА

Лушников Е.М.

Maritime University of Szczecin,
Poland 70-500 Szczecin, str. Waly Chrobrego ½ INM.
Tel. (091)-48-09-402 e-mail: gena@am.szczecin.pl

В общем случае ряд Тейлора воспроизводит функцию, из которой он получен, лишь в окрестностях точки x_0, хотя сама функция может быть определена и за пределами этой окрестности. К примеру [1], функция $f(x) = 1/(1+x^2)$, существует на всей числовой оси $(-\infty,+\infty)$, не имеет ни одной точки разрыва, является чётной аналитической функцией, но раскладывается в ряд Тейлора (Маклорена), сходящийся лишь в пределах x от –1 до +1.

$$f(x) = 1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \qquad |x| \prec 1 \tag{1}$$

Дополнительное разложение этой функции в степенной ряд, воспроизводящее её за границами единичного радиуса сходимости, получено [2] в виде:

$$f(x) = 1/(1+x^2) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \dots \qquad |x| \succ 1 \tag{2}$$

Это дополнительное разложение найдено преобразованием исходной функции $f(x)$ с помощью подстановки $x = 1/y$. Новая функция $F(y)$ раскладывается в ряд Тейлора (Маклорена) по обычным правилам. После разложения осуществляется возврат от аргумента y к аргументу x. Разложениям (1) и (2) в обобщённой форме соответствует запись вида:

$$\begin{gathered} f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \dots \\ f(x) = F(y) = F(0) + \frac{F'(0)y}{1!} + \frac{F''(0)y^2}{2!} + \dots = F(0) + \frac{F'(0)}{1!\cdot x} + \frac{F''(0)}{2!\cdot x^2} + \dots \quad где \;\; y = 1/x \end{gathered} \tag{3}$$

Диверсифицированная запись ряда Тейлора (Маклорена) даёт адекватность отображения функции при помощи степенного ряда во всей области её существования, что обеспечивает абсолютную полноту решения математических задач при помощи рядов. Правильность сделанных выводов подтверждена результатами практических вычислений.

Литература.

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., Математический анализ в задачах и упражнениях (Числовые и функциональные ряды). Москва: «Факториал», 1996. 477с.
2. Алексеева Е.Е., Лушников Е.М., Проблемы и решения в теории рядов, Калининград: «Янтарный сказ», 2004. 256с.