ОГРАНИЧЕНИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Харин А.А.

Современная гуманитарная академия, Россия, 109029, Москва, ул. Нижегородская, 32, +7-915-400-9879, aaharin@yandex.ru

Пусть дана, например, дискретная случайная величина X, принимающая конечное число возможных значений на интервале $[a, b] : 0 < (b - a) < \infty$ (можно предположить, что результаты, аналогичные результатам [1] и настоящего доклада можно получить и для счетных и для непрерывных случаев).

Можно доказать (см., напр., [1]), что для центральных моментов

$$|E(X-\mu)^n| \le (\mu-a)^n \frac{b-\mu}{b-a} + (b-\mu)^n \frac{\mu-a}{b-a},$$

где $\mu \equiv E(X)$ - математическое ожидание.

Упрощая (и переходя к неравенствам, более грубым для $n > 2$), получаем

$$|E(X-\mu)^n| \le (b-a)^{n-2}(\mu-a)(b-\mu), \tag{1}$$

Решая следующее из (1) квадратное уравнение относительно μ, получаем общее неравенство (2) для ограничений $r_{Expect} \equiv \mu - a$ на математическое ожидание

$$a \le (a + r_{Expect}) \le E(X) \le (b - r_{Expect}) \le b \tag{2}$$

и, обозначая центральные моменты как $\sigma^n{}_n \equiv E(X - \mu)^n$, получаем для ограничений

$$r_{Expect} = \frac{b-a}{2} - \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \sigma^2{}_n \left(\frac{|\sigma_n|}{b-a}\right)^{n-2}} \tag{3}$$

Таким образом, получены общие ограничения (2) на математическое ожидание $E(X)$ на краях интервала $[a, b]$ со значениями ограничений (3).

Обозначая $h \equiv h_{Half} \equiv (b - a)/2$, и используя такую распространенную характеристику как дисперсию σ^2, в качестве частного случая центрального момента, можно получить для значений ограничений (3) более лаконичное частное выражение

$$r_{Expect} = h - \sqrt{h^2 - \sigma^2}\,. \tag{4}$$

Обозначая середину отрезка $c \equiv c_{Center} \equiv (b + a)/2$, можно записать общее неравенство (2) в частном компактном явном виде

$$a \le c - \sqrt{h^2 - \sigma^2} \le E(X) \le c + \sqrt{h^2 - \sigma^2} \le b\,. \tag{5}$$

Литература

1. *Harin A.A.* An existence theorem for bounds on the expectation of a random variable. Its opportunities for utility theories. V. 2 // *MPRA, ID:* 67071, 2015. pp. 1-38.