О МАКСИМАЛЬНЫХ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИНАХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Харин А.А.

Современная гуманитарная академия, Россия, 109029, Москва, ул. Нижегородская, 32, +7-915-400-9879, aaharin@yandex.ru

Пусть дана дискретная случайная величина X, принимающая всего два возможных значения x_a и $x_b : x_a \le x_b$ на интервале $[a, b] : 0 < (b - a) < \infty$, таких, что $a \le x_a \le x_b \le b$.

Центральные моменты этой пары значений X, по определению, равны

$$E_2(X-\mu)^n = (x_a-\mu)^n p_a + (x_b-\mu)^n p_b\,, \tag{1}$$

где $\mu \equiv E(X)$ - математическое ожидание, а p_a и p_b - вероятности, соответствующие значениям x_a и x_b.

Из соотношений: (1), $p_a + p_b = 1$ и $x_a p_a + x_b p_b = \mu$ легко получить

$$E_2(X-\mu)^n = (x_a-\mu)^n \frac{x_b-\mu}{x_b-x_a} + (x_b-\mu)^n \frac{\mu-x_a}{x_b-x_a}\,. \tag{2}$$

Дифференцируя (2) по x_a и x_b, можно доказать (подробнее см., напр., [1]), что

$$| E_2(X-\mu)^n | \le (\mu-a)^n \frac{b-\mu}{b-a} + (b-\mu)^n \frac{\mu-a}{b-a}\,, \tag{3}$$

то есть (3) является максимально возможным значением $|E_2(X-\mu)^n|$ при $x_a = a$ и $x_b = b$, достигаемым для $n = 2k$. То есть, если одно или оба значения пары не совпадают с одним из краев интервала, то центральные моменты не могут достичь (3).

Пусть X принимает конечное число возможных значений. Пусть среди них существует хотя бы одно значение x_i, не совпадающее с одним из краев интервала. Тогда можно составить одну или конечное число пар (в т.ч. разделив конечное число значений x_a, x_b и $\{x_i\}$), таких, что хотя бы для одной пары хотя бы одно значение не совпадает с одним из краев интервала.

Более подробный вариант доказательства максимальности см., напр., в [1].

Таким образом, для случайной величины X, принимающей на $[a, b]$ конечное число возможных значений (можно предположить, что аналогичные результаты достижимы и для счетных и для непрерывных случаев), имеем

$$| E(X-\mu)^n | \le (\mu-a)^n \frac{b-\mu}{b-a} + (b-\mu)^n \frac{\mu-a}{b-a}\,. \tag{4}$$

Литература

1. *Harin A.A.* An existence theorem for bounds on the expectation of a random variable. Its opportunities for utility theories. V. 2 // *MPRA*, *ID:* 67071, 2015. pp. 1-38.