# ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Карачик В.В.**

Кафедра математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, пр.-т Ленина, 76, 454080, г.Челябинск, Россия

Установившиеся процессы различной физической природы часто описываются дифференциальными уравнениями эллиптического типа. Одним из важных частных случаев эллиптических уравнений четвертого порядка является бигармоническое уравнение. В последнее время стали активно изучать различные типы краевых задач для бигармонического уравнения такие как задача Дирихле, Рикье, Неймана и т.д.

В единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ рассмотрим следующую краевую задачу для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f(x), \quad x \in S, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a_{00}u + a_{01}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{02}\Delta u\Big|_{\partial S} &= \varphi_1(s), \quad s \in \partial S, \\ a_{11}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{12}\Delta u + a_{13}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta u\Big|_{\partial S} &= \varphi_2(s), \quad s \in \partial S, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ – внешняя нормальная производная, коэффициенты $a_{0j}$ и $a_{1j}$ при $j = 1, 2, 3$ – действительные и постоянные, а $f(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – заданные функции, гладкость которых будет указана ниже. Решением задачи (1)-(2) назовем бигармоническую в $S$ функцию $u(x)$ из класса $u \in C^4(S) \cap C^3(\overline{S})$ удовлетворяющую на $\partial S$ условиям (2).

Основной результат работы – теорема существования решения задачи (1)-(2) для однородного бигармонического уравнения, т.е. при $f(x) = 0$.

**Теорема.** *Решение задачи*

$$\Delta^2 u = 0, \quad x \in S, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} a_{00}u + a_{01}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{02}\Delta u\Big|_{\partial S} &= \varphi_1(s), \;\; x \in \partial S, \\ a_{11}\frac{\partial}{\partial\nu}u + a_{12}\Delta u + a_{13}\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta u\Big|_{\partial S} &= \varphi_2(s), \quad x \in \partial S \end{aligned} \tag{4}$$

*из класса $u \in C^3(\overline{S})$ при произвольных функциях $\varphi_1 \in C^2(\partial S)$ и $\varphi_2 \in C^1(\partial S)$ существует тогда и только тогда, когда полином вида*

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{00} + a_{01}\lambda & 2a_{01} + (2n+4\lambda)a_{02} \\ a_{11}\lambda & 2a_{11} + (2n+4\lambda)a_{12} + \lambda(2n+4\lambda)a_{13} \end{vmatrix}$$

*не имеет корней в $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.*