# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ

**Елизарова Т. Г., Жериков А. В., Калачинская И. С.**

(Россия, Москва)

*В данной работе изложен алгоритм численного решения квазигидродинамических уравнений на неструктурированных пространственных сетках. Этот алгоритм позволяет расширить круг решаемых задач за счет уменьшения требований к геометрии расчетной области. Предложенные ранее алгоритмы расчета течений обобщаются на случай неструктурированных пространственных сеток.*

## Введение

В работах [1], [4] и [5] описана реализация алгоритмов численного решения квазигидродинамических (КГД) уравнений для вязкой несжимаемой жидкости. Показана эффективность и точность реализованных алгоритмов для целого ряда задач.

Разработанные алгоритмы были реализованы на ортогональных пространственных сетках, что накладывало серьезные ограничения на геометрию решаемых задач.

В данной работе предложенные ранее алгоритмы расчета течений обобщаются на случай неструктурированных пространственных сеток. Это позволяет расширить круг решаемых задач за счет уменьшения требований к геометрии расчетной области. Для построения предлагаемого алгоритма были использованы подходы, предложенные в [2] и [3] для расчета течений вязкого сжимаемого газа на неструктурированных сетках.

## Аппроксимация КГД уравнений

Запишем систему КГД уравнений в декартовых координатах в безразмерном виде:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial \omega_x}{\partial x}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial (u_x{}^2)}{\partial x}+\frac{\partial (u_x u_y)}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial (\Pi_{xx}^{NS})}{\partial x}+\frac{\partial (\Pi_{yx}^{NS})}{\partial y}+ \\ +2\frac{\partial (u_x\omega_x)}{\partial x}+\frac{\partial (u_x\omega_y)}{\partial y}+\frac{\partial (u_y\omega_x)}{\partial y},\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_y}{\partial t}+\frac{\partial (u_y{}^2)}{\partial y}+\frac{\partial (u_x u_y)}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial (\Pi_{xy}^{NS})}{\partial x}+\frac{\partial (\Pi_{yy}^{NS})}{\partial y}+ \\ +\frac{\partial (u_y\omega_x)}{\partial x}+\frac{\partial (u_x\omega_y)}{\partial x}+2\frac{\partial (u_y\omega_y)}{\partial y}+Gr\,T,\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial (u_x T)}{\partial x}+\frac{\partial (u_y T)}{\partial y}=\frac{\partial (\omega_x T)}{\partial x}+\frac{\partial (\omega_y T)}{\partial y}+ \\ +\frac{1}{\Pr}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right],\end{gathered} \tag{4}$$

$$\omega_x=\tau\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}\right),$$

$$\omega_y=\tau\left(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}-Gr\,T\right).$$

Компоненты тензора вязких напряжений Навье–Стокса $\Pi^{NS}$ имеют вид

$$\Pi_{xx}^{NS}=\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u_x}{\partial x},\ \Pi_{yx}^{NS}=\Pi_{xy}^{NS}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right),\ \Pi_{yy}^{NS}=\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

В соответствии с методом конечного объема, уравнения (1–4) интегрируются по контрольному объему и далее к ним применяется формула Грина. Уравнение (1) в результате преобразуется в систему линейных уравнений для давления, остальные — в систему уравнений для нахождения скорости и температуры. При аппроксимации производной по времени применяется явная схема.

### Течение в каверне с подвижной крышкой

Рассматривается течение изотермической жидкости в квадратной каверне. Верхняя крышка каверны движется с постоянной скоростью $U_0$.

В качестве начального условия выбиралось состояние покоя $\vec{u} = 0$. Давление в начальный момент времени считалось равным $p = 0$. Чтобы устранить неоднозначность в определении давления, будем использовать нормировку $p(0,0,t) = 0$.

Задача решалась при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 100, 1000$. Значения $\tau$ выбирались исходя из условия $\tau = 1/\mathrm{Re}$. Некоторые результаты расчетов представлены на (рис. 3.1) и (рис. 3.2).

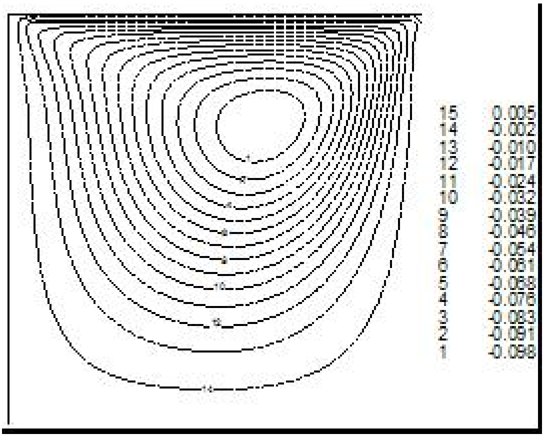


**Рис. 3.1.** Функция тока для Re=100

### Тепловая конвекция в квадратной области

Рассматривается задача о течении теплопроводной вязкой несжимаемой жидкости в квадратной области с двумя вертикальными изотермическими стенками. Течение возникает благодаря разности температур этих стенок. Горизонтальные стенки являются адиабатическими.

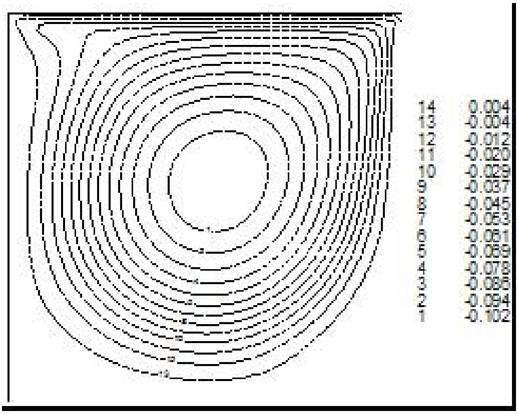


**Рис. 3.2.** Функция тока для Re=1000

В качестве начального условия выбиралось состояние покоя $\vec{u} = 0,\ T = 0$. Давление в начальный момент времени считалось равным $p = 0$. Чтобы устранить неоднозначность в определении давления, будем использовать нормировку $p(0,0,t) = 0$.

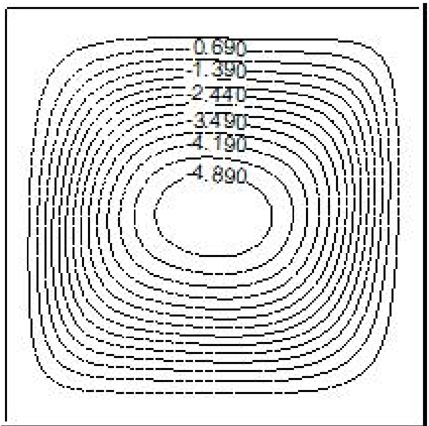


**Рис. 4.1.** Функция тока для Gr=$10^4$

Задача решалась для чисел Грасгофа $Gr = 10^4$ и $10^5$, числа Прандтля $\Pr = 1$ и параметра $\tau = 10^{-4}$. Шаг по времени брался $\Delta t = 10^{-5}$. Некоторые результаты расчетов представлены на (рис. 4.1) и (рис. 4.2).

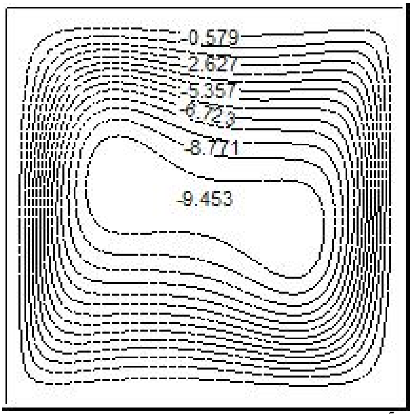


**Рис. 4.2.** Функция тока для $\mathrm{Gr}=10^5$

**Заключение**

Из представленных результатов следует, что предложенный алгоритм решения системы квазигидродинамических уравнений на неструктурированных сетках позволяет находить решения, которые достаточно хорошо совпадают с соответствующими решениями системы на регулярных прямоугольных сетках. Таким образом, предложенная аппроксимация КГД системы может использоваться для численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости на нерегулярных треугольных сетках. В дальнейшем планируется провести расчеты течений жидкости в произвольной области.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуров Д. Б., Елизарова Т. Г., Шеретов Ю. В. Численное моделирование течений жидкости в каверне на основе квази-

гидродинамической системы уравнений. // Математическое моделирование. 1996. Т. 8, № 7, С. 33-44.
2. Елизарова Т. Г. Лекции Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. – М.: Физический факультет МГУ, 2005 – Ч. 1, С. 120; Ч. 2, С. 108.
3. Елизарова Т. Г., Серегин В. В. Численное решение квазигазодинамических уравнений на треугольных сетках. // Вестник Московского университета, Сер. 3. Физ. Астрономия, 2005, № 4, С. 15-18.
4. Елизарова Т. Г., Шеретов Ю. В. Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41, № 2, С. 239-255.
5. Семенов М. В., Шеретов Ю. В. Численное моделирование течений жидкости в окрестности шара. // Сб. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун., 2005, С. 107-123.

## NUMERICAL MODELING OF THE QUASIHYDRODYNAMIC EQUATIONS ON TRIANGLE MESH

**Elizarova T. G., Zherikov A. V., Kalachinskaya I. S.**

(Russia,Moscow)

*In the given article the algorithm of the numerical modeling of the quasihydrodynamic equations on not structured spatial grids is suggested. This algorithm allows expanding a range of solved problems due to reduction of requirements to geometry of area.*