ОБ УСЛОВИЯХ И МЕТОДАХ СПРЯМЛЯЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ШЕСТИУГОЛЬНЫХ ТКАНЕЙ

Рудаков Б. П.

(Россия, Тюмень)

В статье рассматриваются составные шкальные номограммы нулевого жанра специального вида для уравнений с четырьмя переменными. В терминах геометрии тканей изучены специальные классы шестиугольных тканей для указанных уравнений, найдены условия и эффективные методы их спрямляемости, исследован вопрос единственности

Пусть совокупность четырёх семейств поверхностей

$$t_j\left(x, y, z\right) = t_j = const \quad \left(j = 1-4\right) \tag{1}$$

определяет ткань трёхмерного пространства [1]. Известно, что исключение *x, y, z* из (1) приводит к уравнению ткани; возьмём его в виде

$$t_4 = f\left(t_1, t_2, t_3\right). \tag{2}$$

Интерес представляет определение условий, при выполнении которых образованная поверхностями ткань (1) была бы топологически эквивалентна ткани, образованной семействами плоскостей. Решение этой проблемы (проблема спрямляемости ткани) наталкивается на большие вычислительные трудности [1]. Естественны поэтому попытки решить вопрос до конца в отдельных частных случаях, имеющих к тому же важное прикладное значение.

Рассмотрим случай, когда коррелятивный образ спрямлённой пространственной ткани даёт номограмму из четырёх плоских прямолинейных шкал, лежащих попарно в двух плоскостях. Для определённости будем считать, что прямолинейные шкалы t_1, t_2 принадлежат координатной плоскости $y=0$, а шкалы t_3, t_4 – плоскости $z=0$, чего, очевидно, можно достигнуть надлежащим проективным преобразованием пространства. При этих условиях, как показал Массо, уравнение (2) примет вид

$$\begin{vmatrix} f_{i1}(t_i), & 0, & f_{i2}(t_i), & 1 \\ f_{k1}(t_k), & f_{k2}(t_k), & 0, & 1 \end{vmatrix} = 0 \ (i=1,\ 2\ ;\ k=3,\ 4). \quad (3)$$

Пространственная номограмма с этим уравнением допускает плоский эквивалент – составную номограмму из двух подномограмм с общей прямолинейной немой шкалой α :

$$\begin{vmatrix} f_{i1}, f_{i2}, 1 \\ \alpha \quad 0 \quad 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{k1}, f_{k2}, 1 \\ \alpha \quad 0 \quad 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3')$$

позволяющей графически на плоскости представить функциональную зависимость, содержащую четыре переменных. Здесь, как и далее, $f_{jr}\left(t_j\right) \equiv f_{jr}$.

В работе [2] доказана теорема о существовании точно 15 типов проективно различных номограмм с прямолинейными шкалами (с точностью до параметризации шкал), один из которых образует однопараметрическое семейство, две номограммы которого проективны лишь при одном и том же сложном отношении λ четырех узлов графа номограммы [1]. Последний случай и рассматривается в данной статье.

Найдём условия представимости уравнения (2) номограммой указанного типа, исследуем вопрос о единственности (с точностью до коллинеаций пространства) такого представления, укажем эффективные методы (с помощью лишь квадратур) отыскания элементов уравнения (3).

В дальнейшем будем считать, что функция $f(t_1, t_2, t_3)$, вместе с отличными от нуля функциями

$$M = -\left(t_4\right)_2^{/} \Big/ \left(t_4\right)_1^{/}\ ,\ \ M = -\left(t_4\right)_3^{/} \Big/ \left(t_4\right)_1^{/}, \tag{4}$$

будет достаточно гладкой в некоторой прямоугольной области *G*. Относительно неизвестных функций f_{jr} уравнения (3) считаем, что они обладают производными необходимого порядка.

Среди номограмм исследуемого типа рассмотрим, без нарушения общности [2], номограмму с уравнением (3), где

$$f_{11} \equiv 1,\ f_{21} \equiv 0,\ f_{31} \equiv -1,\ f_{41} \equiv m\ ,\ \left(m \neq 0, \pm 1\right) \tag{5}$$

Такую номограмму (и соответствующую ей ткань) обозначим T_0.

Сложное отношение λ абсцисс точек пересечения прямолинейных носителей шкал переменных $t_j \left(j = 1-4 \right)$ с осью α номограммы T_0 будет:

$$\lambda = \left(1, 0, -1, m\right) = \left(2m\right) \Big/ \left(m-1\right), \tag{6}$$

где λ существует и отлично от 0; 1 (в силу (6)).

Лемма. *Уравнение (2) тогда и только тогда представимо номограммой* T_0*, когда при заданных функциях* $M, \bar{M}$ *(4) существует решение относительно функций* $f_j \left(j = 1-3\right)$ *системы дифференциальных уравнений:*

$$M = \frac{f_1 \left(f_2\right)_2^{/}}{\left(f_1\right)_1^{/}},\ \ \bar{M} = -\frac{\left(2f_2 - f_1\right)\left(\lambda f_1 - 2f_2\right)\left(f_3\right)_3^{/}}{2\left(\lambda - 1\right)\left(f_1\right)_1^{/} f_2 f_3}, \tag{7}$$

где $\left(f_j\right)_j^{/} \equiv \dfrac{df_j}{dt_j}$. Справедливость леммы следует из [2].

Для дальнейшего введем обозначения:

$$A \equiv \left(\ln \frac{M}{\bar{M}}\right)_1^{/}, \quad B \equiv \left(\ln MA\right)_1^{/}, \quad D \equiv \sqrt{B\left(\ln M\bar{M}AB\right)_1^{/}}\,. \tag{8}$$

Теорема 1. *Для представления уравнения (2) номограммой* T_0 *необходимо, чтобы функции* $M, \bar{M}$ *(4) удовлетворяли условиям:*

$$M_3^{/}=0\,,\ \left(\ln M\right)_{12}^{//}=0\,,\ \left(\ln \bar{M}\right)_{13}^{//}=0 \tag{9}$$

$$\left(\ln \bar{M} D\right)_1^{/}=0\,. \tag{10}$$

Справедливость условия $M_3^{/}=0$ непосредственно следует из (7).

Коррелятивным образом номограммы T_0 является ткань, образованная четырьмя пучками плоскостей, оси которых (в соответствии с пучками плоскостей обозначим их также $t_j\left(j=1\text{–}4\right)$) разбиты на пересекающиеся в проективном пространстве пары t_1, t_2 и t_3, t_4. На плоскостях любого семейства плоскостей t_j ткани T_0 плоскости остальных трёх семейств высекают, очевидно, прямолинейные ткани, кривизны которых на семействах плоскостей t_2, t_3 вычисляются по формулам [3]:

$$k_2=\left(\ln\bar{M}\right)_{13}^{//}\Big/\left(f_1^{/}\right)^2\bar{M}\ ,\quad k_3=-\left(\ln M\right)_{12}^{//}\Big/\left(f_1^{/}\right)^2 M\,. \tag{11}$$

Известно [1], что рассматриваемая ткань T_0 является шестиугольной, все кривизны $k_j = 0 \ \left(j = 1 - 4 \right)$, но тогда из (11) следуют последние два из условий (9).

Докажем выполнимость условия (10).

Записав систему (7) в виде системы уравнений в частных производных и доведя последнюю с помощью условия $\left(f_2\right)_{21}^{//} = 0$ до канонического вида [4], получим:

$$\left(f_i\right)_j^{/} = \delta_i^j \, y_i \ \left(i, j = 1,2,3\right), \ \left(y_1\right)_1^{/} = \frac{y_1^2}{f_1} - y_1 \left(\ln M\right)_1^{/} \tag{12}$$

где, как следует из (7),

$$y_2 = \frac{y_1}{f_1} f_2 \, M, \ \ y_3 = -\frac{2\left(\lambda - 1\right) y_1 f_2 f_3 \bar{M}}{\left(2f_2 - f_1\right)\left(\lambda f_1 - 2f_2\right)}, \tag{13}$$

δ_i^j – символ Кронекера.

Из условий полной интегрируемости этой системы [4] получены дополнительные условия на функции системы (12):

$$\frac{y_1\left(\lambda f_1^2 - 4f_2^2\right)}{f_1\left(2f_2 - f_1\right)\left(\lambda f_1 - 2f_2\right)} = A, \tag{14}$$

$$\frac{y_1 f_2\left[2\lambda\left(\lambda + 1\right) f_1^2 - 16\lambda f_1 f_2 + 8\left(\lambda + 1\right) f_2^2\right]}{\left(2f_2 - f_1\right)\left(\lambda f_1 - 2f_2\right)\left(\lambda f_1^2 - 4f_2^2\right)} = B \tag{15}$$

$$\frac{2\left(\lambda - 1\right) y_1 f_2}{\left(2f_2 - f_1\right)\left(\lambda f_1 - 2f_2\right)} = \pm D, \tag{16}$$

где A, B, D есть (8).

Дифференцируя последнее уравнение по t_1 и используя уравнения (12), (14)-(16) и условия (9), получим, независимо от знака в (16), условие (10).

Заметим, что условиями, наложенными выше на функцию $f\left(t_1, t_2, t_3\right)$, обеспечено существование и отличие от нуля функций A, B, D во всех точках области *G*.

Теорема 2. *Если уравнение (2) представимо в виде (3) с условиями (5) (т.е. номограммой* T_0*), то система уравнений (12) допускает двухпараметрическую группу преобразований,*

$$\overline{f}_1 = a_{33} f_1 ,\ \overline{f}_2 = a_{33} f_2 ,\ \overline{f}_3 = a_{22} f_3 . \qquad (17)$$

Эти преобразования являются подгруппой проективных преобразований пространства, автоморфных относительно плоскостей $y = 0, z = 0$ и прямых: $\left.\begin{matrix} x = 1, \\ y = 0 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} x = 0, \\ y = 0 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} x = -1, \\ z = \ \ 0 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} x = m, \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ – носителей шкал переменных t_j номограммы T_0.

Группа (17) позволяет присоединить к системе (12) начальные условия; возьмём их в виде:

при $t_i = t_{i1}$: $f_i = 1 \quad \left(i = \overline{1, 3} \right)$ (18)

Нетрудно видеть, что взятые начальные условия совместны и полны, т.е. они вполне определяют, и притом однозначно, значения параметров a_{22}, a_{33}.

В случае конечного λ, отличного от $0, \pm 1$, справедлива

Теорема 3. *Уравнение (2) тогда и только тогда представимо номограммой* T_0*, когда функции* $M, \overline{M}$ *(4), помимо условий теоремы 1, удовлетворяют также условию:*

$$\frac{\left(D^2-AB\right)^2}{D^2\left(A^2+D^2-2AB\right)}=\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2. \tag{19}$$

При этом для уравнения (2) существуют два значения λ (λ_1 и $\lambda_2=1/\lambda_1$); для каждого из них существует по две системы элементов уравнения (3) номограммы T_0, однозначно определяющиеся (с точностью до проективных преобразований пространства) с помощью лишь квадратур.

Справедливость условия (19) проверяется непосредственно, если в левую часть его вместо A,B,D подставить их выражения (14)-(16).

Переходим к доказательству достаточности условий.

Из выполнимости условия (19) сложное отношение λ определится из выражения

$$\frac{\lambda-1}{\lambda+1}=\pm k, \tag{20}$$

где для краткости,

$$k=\left|\frac{D}{D^2-AB}\sqrt{A^2+D^2-2AB}\right| \tag{21}$$

Из уравнений (14-16) следует, что подкоренное выражение

$$A^2+D^2-2AB=\left(\frac{y_1}{f_1}\right)^2 \tag{22}$$

отлично от нуля и положительно в области G.

В зависимости от знаков в (16) и (20) система уравнений (12) распадается на четыре системы уравнений:

1). $$\begin{cases} f_2 = \dfrac{\lambda_1}{(\lambda_1+1)\gamma} f_1 \ , & (23) \\ (f_i)'_j = \delta_i^j y_i \quad (\ i=1,3;\ j=1-3), & (24) \end{cases}$$

где $y_1 = f_1\sqrt{A^2 + D^2 - 2AB}\ ,\ \ y_3 = -f_3\,\bar{M}D\,.$ (25)

Здесь и далее

$$\gamma = 1 + k\frac{A}{D} - k^2\frac{D^2 - AB}{D^2}\ . \qquad (26)$$

2). $$\begin{cases} f_2 = \dfrac{(\lambda_1+1)\gamma}{4\lambda_1} f_1 \ , & (27) \\ (f_i)'_j = \delta_i^j y_i \quad (\ i=1,3;\ j=1-3), & (28) \end{cases}$$

где $y_1 = -f_1\sqrt{A^2 + D^2 - 2AB}\ ,\ y_3 = -f_3\,\bar{M}D\,.$ (29)

3). $$\begin{cases} f_2 = \dfrac{(\lambda_1+1)\gamma}{4} f_1 ; & (30) \\ (f_i)'_j = \delta_i^j y_i \quad (\ i=1,3;\ j=1-3), & (31) \end{cases}$$

где $y_1 = -f_1\sqrt{A^2 + D^2 - 2AB}\ ,\ \ y_3 = f_3\,\bar{M}D\,;$ (32)

4). $$\begin{cases} f_2 = \dfrac{1}{(\lambda_1+1)\gamma} f_1 & (33) \\ (f_i)'_j = \delta_i^j y_i \quad (\ i=1,3;\ j=1-3), & (34) \end{cases}$$

где $y_1 = f_1\sqrt{A^2 + D^2 - 2AB}\ ,\ \ \ y_3 = f_3\,\bar{M}D\,.$ (35)

Исходная система (7) распалась на четыре системы: (23-24), (27-28), (30-31), (33-34). Все вместе они эквивалентны исходной системе (7) в силу условий (9), (10), (19). При этих условиях каждая из четырех систем (24),(28), (32), (34) является вполне интегрируемой [4]. Следовательно, пфаффовы системы уравнений, соответствующие этим системам, являются вполне интегрируемыми. При заданных начальных условиях они имеют решение и оно единственное [5].

Из уравнений (23-24) при начальных условиях (18), получим:

$$f_1 = \exp\left(\int_{t_{11}}^{t_1} \sqrt{A^2 + D^2 - 2AB}\; dt_1 \right), \quad f_2 = \frac{\lambda_1}{\left(\lambda_1 + 1\right)\gamma} f_1,$$

$$f_3 = \exp\left(-\int_{t_{31}}^{t_3} \bar{M} D\, dt_3 \right). \tag{40}$$

Если решить системы уравнений (27-28), (30-31), (33-34). при начальных условиях (18) (обозначим эти решения, соответственно, $f_j^{(2)}, f_j^{(3)}, f_j^{(4)}$) и найденные решения сопоставим с решениями (40), то получим:

$$f_1^{(2)} = 1/f_1, \quad f_2^{(2)} = 1\Big/\left(4f_2\right), \qquad f_3^{(2)} = f_3; \tag{41}$$

$$f_1^{(3)} = 1/f_1, \quad f_2^{(3)} = \lambda_1\Big/\left(4f_2\right), \quad f_3^{(3)} = 1/f_3; \tag{42}$$

$$f_1^{(4)} = f_1, \quad f_2^{(4)} = f_2/\lambda_1, \qquad f_3^{(4)} = 1/f_3. \tag{43}$$

Рассматривая преобразованиями (17), видим, что не существует таких значений параметров a_{22}, a_{33}, при которых бы получились соотношения (41-43).

Сформулируем результаты в случае $\lambda = -1$.

Теорема 4. *Уравнение (2) тогда и только тогда представимо номограммой* T_0 *со значением* $\lambda=-1$, *когда функции* $M, \overline{M}$ *(4), помимо условий теоремы 1, удовлетворяют также условию:*

$$D^2 - AB = 0.$$

При этом существуют четыре системы элементов $f_j\left(j=1-3\right)$, однозначно определяющихся (с точностью до проективных преобразований пространства) с помощью лишь квадратур.

Решениями одной из систем будут:

$$f_1 = \exp\left(\int_{t_{11}}^{t_1} \sqrt{A^2 - D^2}\, dt_1\right),\ f_2 = f_1 \frac{A + \sqrt{A^2 - D^2}}{2D},$$

$$f_3 = \exp\left(-\int_{t_{31}}^{t_3} \overline{M} D\, dt_3\right). \tag{44}$$

Остальные решения выражаются через решения (44) по формулам (41)-(43), где $\lambda_1 = -1$

Из изложенного для геометрии 4 – тканей [1] имеем:

1. Если шестиугольная ткань с уравнением (2) топологически эквивалентна ткани, образованной четырьмя пучками плоскостей с попарно пересекающимися осями и со сложным отношением λ четвёрок точек, в которых четыре оси пересекаются с их общей секущей, то существует четыре топологических преобразования, подобным образом спрямляющие ткань (с точностью до проективных преобразований).
2. Формулы (40) - (43) (при $\lambda \neq 0, \pm 1$) и аналогичные формулы при $\lambda = -1$, определяют лишь квадратурами уравнения семейств плоскостей ткани T_0 (если она существует).
3. Теорема 3 указывает эффективные условия подобной спрямляемости тканей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бляшке В. Введение в геометрию тканей. − М.: Госуд. изд-во ФМ литературы , 1959. −144 с.
2. Рудаков Б.П.(Дураков). О представлении уравнений с четырьмя переменными составными номограммами нулевого жанра. // Уч.зап.Свердл. гос. пед. ин-та. 1965. Вып. 31. С.29-50.
4. Рудаков.Б.П. Условия и методы спрямляемости некоторых пространственных тканей, номографирования уравнений и приведения их к каноническим формам. − Тюмень: Издательство ″Вектор Бук″, 2003. −246 с.
5. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. – М.:Госуд. изд-во иностранной литературы, 1947. −360 с.
6. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. – М.: ВЦ АН СССР, 1964. −662 с.

ABOUT THE CONDITIONS AND METHODS OF RECTIFIABILITY OF SOME SPACE HEXAGON WEBS

Rudakov B. P.

(Russia, Tyumen)

In the article are esteemed compound scale nomograph of a zero genre of a special kind for equations with four variable. In the terms of geometry of webs the special classes of hexagon webs for the indicated equations are studied, the conditions and effective methods of their rectifiability are retrieved, the problem of uniqueness is reviewed