НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В НОРМЕ ПРОСТРАНСТВА H_E РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ.

Мокин А. Ю.

(Россия, Пущино)

В работе рассматриваются разностные схема с весами для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями (задача Самарского–Ионкина). Доказана абсолютная неустойчивость данной схемы в сеточной среднеквадратической норме при любом значении весового множителя $\sigma \geq 0$.

Введение. В работе [1] подробно исследуется задача теплопроводности с нелокальными граничными условиями (задача Самарского–Ионкина), которая имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T, \\ &u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \quad 0 < t \leq T, \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned} \tag{1}$$

доказана теорема существования решения в следующих предположениях на начальные данные

$$\varphi(x) \in C^1[0,1],\ \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = \varphi'(1).$$

Там же доказана единственность решения, устойчивость решения по начальным данным и по правой части, изложены физические соображения, приводящие к данной постановке.

В настоящей работе рассматривается вопрос устойчивости в среднеквадратической сеточной норме разностной схемы с весами, аппроксимирующей задачу (1).

В прямоугольнике $\Pi = \{(x,t): 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ введём сетку $\Omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, где $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 1,2,\ldots,N,\ hN = 1\}$, $\omega_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 1,2,\ldots,M,\ \tau M = T\}$. Пусть H — пространство сеточных функций, заданных на сетке ω_h, снабжённое нормой и скалярным произведением

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)},\quad (u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} hu_i v_i + 0.5hu_N v_N \tag{2}$$

Для задачи (1) рассматривается семейство разностных схем с весами

$$\begin{aligned} &\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \sigma A y^{n+1} + (1-\sigma) A y^n = 0, \quad n = 0,1,\ldots,N-1, \\ &y^k = y^k(x) \in H,\ k = 0,1,\ldots,N, \quad y^0 = \varphi(x_i),\ i = 1,2,\ldots,N. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $A \in L(H \to H)$:

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i},\ i = 1,2,\ldots,N-1,\ (Ay)_N = -2h^{-1}\left(y_{x,0} - y_{\bar{x},N}\right).$$

Разностные схемы (3) аппроксимируют задачу (1) со вторым порядком по h и первым порядком по τ при любом значении $\sigma \ge 0$, при σ=0.5 (симметричная схема) имеем дополнительно второй порядок по времени.

Определение 1. Будем говорить, что разностная схема (3) равномерно устойчива по начальным данным в норме $\|\circ\|$, если для её решения на верхнем слое справедливо неравенство $\|y^{n+1}\| \le \|y^n\|,\ n = 0,1,\ldots,N-1$ при любом выборе $y^n \in H$.

В дальнейшем устойчивость разностных схем будет пониматься в смысле определения 1.

Схемы (3) ранее изучались в работах [2],[3]. Построен самосопряжённый положительно определённый оператор

$D \in L(H \to H):$, определяющий энергетическую норму $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$, в которой данные схемы устойчивы при тех или иных ограничениях на параметры $h > 0,\ \tau > 0,\ \sigma \ge 0$. Однако возникает нетривиальная задача отыскания констант эквивалентности построенной энергетической нормы с нормировкой (2), которая была решена в работе [4].

В то же время разностные схемы вида (3) для задачи теплопроводности с краевыми условиями первого рода, как известно (см., например, [5]), обладают устойчивостью в норме (2). Отсюда возникает предположение, что разностные схемы (3) устойчивы не только в энергетической норме, порождённой оператором *D*, но и в среднеквадратической сеточной норме (2) при некоторых ограничениях на σ, h, τ..

Основной результат настоящей работы заключается в доказательстве абсолютной неустойчивости в норме (2) разностных схем с весами для задачи Самарского–Ионкина при любом значении весового множителя $\sigma \ge 0$.

Симметрическая часть оператора А. Запишем разностные схемы (3) в виде, разрешённом относительно сеточной функции на верхнем слое, т.е. в виде $y^{n+1} = Sy^n,\ n = 0,1,\ldots,N-1,$ *где* $S = E - \tau\left(E + \sigma\tau A\right)^{-1} A.$

Условие устойчивости для разностных схем (3) эквивалентно требованию $\|S\| \le 1,$ где под операторной нормой понимается спектральная норма, порождённая векторной нормой (2). Последнее неравенство может быть записано в виде операторного неравенства

$$B + (\sigma - 0.5)\tau A^* A \ge 0. \qquad (4)$$

Здесь A^* — оператор, сопряжённый к *A* в смысле скалярного произведения (2), $B = 0.5(A + A^*)$. Отсюда видно, что свойства симметрической части оператора *A* сильно влияют на устойчи- вость разностных схем (3).

Авторы работы [2] на основе проведённых вычислений установили наличие отрицательного собственного значения оператора B. В настоящей работе факт существования и единственности отрицательного собственного значения доказан аналитически для любого $N>4$. Справедлива

Теорема 1. *Симметрическая часть оператора A при каждом натуральном $N>4$ имеет единственное отрица-тельное собственное значение $\lambda_{-}(N)=2(1-\text{ch}\varphi)$, где φ – положительный корень уравнения*

$$f(\varphi)=0, \quad f(\varphi)=\text{sh}(N-1)\varphi-8\text{sh}\varphi\ \text{sh}^2 0.5N\varphi, \tag{5}$$

соответствующий собственный вектор имеет вид

$$y_{-}(x_j)=2\text{sh}\, j\varphi+\text{sh}(N-j)\varphi,\ j=1,2,\dots,N.$$

Непосредственно из теоремы 1 и неравенства (4) вытекает

Следствие 1. *Разностные схемы (3) не являются устойчивыми в среднеквадратической сеточной норме (2) при любом выборе шагов сетки $\tau>0$, $h>0$ и весового множителя $\sigma\in[0,0.5]$.*

Доказательство теоремы 1 заключается в исследовании нулей нелинейной функции $f(\varphi)$ с помощью стандартных средств математического анализа.

Абсолютная неустойчивость схем с весами. В результате исследования симметрической части оператора A был сделан вывод о неустойчивости разностных схем с весами (3) при $\sigma\in[0,0.5]$. Для доказательства неустойчивости при $\sigma>0.5$ потребуются некоторые свойства самого оператора A.

Нетрудно проверить, что оператор A вырожден. Его ядро одномерно, базис в нём образует сеточная функция $y_0(x_j)=x_j$, $j=1,2,\dots,N$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство сеточных функций $y_\alpha = y_0 + \alpha y_-$, $-\infty < \alpha < +\infty$. В результате проверки неравенства (4) на данном семействе функций получим

$$\left[\lambda_- + \tau(2\sigma - 1)C_2\right]\alpha^2 + 2C_1\lambda_-\alpha \geq 0, \ -\infty<\alpha<+\infty,$$

где $C_1 = (y_-, y_0) > 0$, $C_2 = (Ay_-, Ay_-) > 0$. Последнее неравенство при любом выборе параметров σ>0, h>0 и τ>0 нарушается при некотором вещественном α. Следовательно, справедлива

Теорема 2. *Разностные схемы с весами (3) являются неустойчивыми в сеточной среднеквадратической норме (2) при любом выборе параметров схем* $h > 0$, $\tau > 0$, $\sigma \geq 0$.

В частности, абсолютно неустойчивой является чисто неявная схема (случай $\sigma = 1$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13, №2. С. 294-304.
2. Ионкин Н.И., Морозова В.А. Об устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями.—Москва: Диалог-МГУ, 2000. — 18 с.
3. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. Разностные схемы для нелокальных задач. // Известия высших учебных заведений. 2005. №1. С. 40-50.
4. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. К теории устойчивости нелокальных разностных схем. — Москва: МАКС Пресс, 2006. — 85 с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. —Москва: Наука, 1989. — 654 с.

Мокин А. Ю. — МКО — 2007, т. 2, стр.68–73
Mokin A. Ju. — MCE — 2007, v. 2, p. 68–73

THE INSTABILITY OF DIFFERENCE SCHEMES WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS IN H_E SPACE

Mokin A. Ju.

(Russia, Pushchino)

A difference scheme with weight multiplier for heat equation with nonlocal boundary conditions is considered in this paper. The instability of scheme is proved in difference mean square norm at any choice of scheme parameters $h > 0,\ \tau > 0,\ \sigma \geq 0$.