КОРПОРАТИВНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СЕТИ С РАЗРУШЕНИЕМ И ВОССТАНОВЛЕНИЕМ. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В РАСТУЩИХ СЕТЯХ

Коганов А. В., Сазонов А. Н.

(Россия, Москва)

Исследуется отказоустойчивость конечной вычислительной сети с полным графом, элементы которой имеют вероятность отказа и вероятность восстановления после отказа. Дается аналитическая оценка вероятности безотказной работы сети в целом в течении заданного времени с учетом возможного перераспределения функций между элементами одного вида. Для растущих сетей доказывается наличие фазового перехода по параметру темпа роста. При достаточно быстром росте сеть имеет положительную вероятность неограниченной безотказной работы.

Введение

Вычислительной средой (или итерационной сетью) называется совокупность функциональных элементов, описываемых формальными автоматами, расположенных в вершинах графа (в общем случае ориентированного), причем входная информация каждого элемента формируется как совокупность выходов тех элементов, которые расположены в вершинах, из которых на вершину данного элемента идет стрелка графа. Такие математические конструкции широко используются для моделирования распределенных процессов на дискретных пространствах или приближенного описания процессов с непрерывным носителем [2]. Наиболее распространены вычислительные среды для расчета схем конечных разностей или конечных элементов. В последнее время появилось много итерационно сетевых имитационных моделей в биологии и экономике. Однако самым непосредственным применением этого типа моделей являются комплексы вычислительных машин, связанных в информационную сеть.

В данной работе исследуется работоспособность распределенной вычислительной системы в условиях случайного выхода элементов сети из строя и вероятностного успеха работ по восстановлению каждого отказавшего элемента. При этом предполагается возможность перераспределения вычислительных задач по сохранившимся сетевым ресурсам. Отказ системы наступает только тогда, когда отсутствуют ресурсы необходимого вида. Будут получены аналитические формулы для математического ожидания времени безотказной работы системы, вероятностей отказа на данном такте или до него и другие. Относительная простота формул и сама возможность аналитического расчета обусловлена предельной простотой графа среды — это полный граф. При любой комбинации отказов элементов, можно произвольно использовать любые сочетания оставшихся функциональных единиц сети. Такие системы называются корпоративными. Если граф системы не полный, то расчеты наработки на отказ значительно усложняются и в общем случае практически осуществимы только методом имитации процесса на компьютере [3,4].

1. Основные определения и постановки задач

Определение 1. *Корпоративной сетью* называется конечная вычислительная среда с полным графом, в которой каждый функциональный элемент относится к одному из конечного набора типов. Кроме того, каждый элемент имеет альтернативные макросостояния: «*исправен* (1)» или «*поврежден* (0)».

Интерпретация. Элементы одного типа взаимозаменяемы. Элементы разных типов не могут замещать друг друга.

Определение 2. *Заданием* для корпоративной сети называется некоторое подмножество типов элементов. *Интерпретация*. В случае полного графа и с учетом взаимозаменяемости элементов возможность решения задачи означает только наличие в сети элементов всех нужных типов.

Определение 3. *Такт работы* корпоративной сети определяется как два испытания Бернулли на элементах сети: *процесс разрушения* (D) и *процесс восстановления* (R). Процесс D происходит только на элементах в макросостоянии 1. Он с вероятностью p меняет их макросостояние на 0. Процесс R происходит только на элементах в макросостоянии 0. Он с вероятностью q переводит их в макросостояние 1. Имеются **два режима работы** сети в зависимости от последовательности этих процессов на каждом такте. Режим с ремонтом перед выполнением задания определяется как последовательность процессов **(DR)**. Режим с ремонтом после выполнения задания определяется как последовательность процессов **(RD)**.

Определение 4. *Отказом* корпоративной сети называется такт работы сети, на котором все элементы некоторого типа имеют макросостояние 0. *Наработкой* сети называется номер первого такта отказа. *Средней наработкой* называется математическое ожидание наработки. *Интерпретация*. Предполагается, что задание требует использования элементов всех типов. Это упрощающее предположение.

Сформулируем несколько задач относительно введенных понятий.

Задача с фиксированным ресурсом элементов.

Задано число типов элементов K и число элементов каждого типа

$$m_1, \ldots, m_K\,,\; M = m_1 + \ldots + m_K\,. \tag{1.1}$$

Задано время эксплуатации системы: T тактов (натуральное число). В этом случае у системы есть положительная вероятность P_T проработать без отказа весь период эксплуатации. Можно поставить задачу получения явной формулы $P_T = F(T, p, q, m_1, \ldots, m_K)$.

Задача с заданной пропорцией типов элементов отличается от предыдущей фиксацией пропорций разных типов элементов:

$$m_1 = c_1 M;,\ldots,m_k = c_k M; \quad 1 = c_1 + \ldots + c_K; \tag{1.2}$$

Тогда можно вывести зависимость $P_T = F(T, p, q, M, c_1, \ldots, c_K)$.

Задача о растущих сетях. Гипотеза о фазовом переходе.

Предыдущая постановка задачи позволяет перейти к растущим сетям, где (при фиксированном кортеже отношений числа элементов разных типов и вероятностей разрушения и восстановления $\langle p, q, c_1, \ldots, c_K \rangle$) неограниченно растет на каждом такте общее число элементов сети M. В этом случае время эксплуатации сети можно считать неограниченным. Возникает естественная гипотеза о положительной вероятности безотказной работы неограниченное время при достаточно быстром росте сети $M(t) \uparrow \infty$:

$$\lim_{T\to\infty} F(T, p, q, M(T), c_1, \ldots, c_K) = P_\infty > 0 \tag{1.3}$$

$$P_\infty = P_\infty(p, q, c_1, \ldots, c_K, \xi), \quad M(t) = m(t, \xi) \tag{1.4}$$

В последнем уравнении формально вводится параметр скорости роста сети. Если это так, то можно говорить о фазовом переходе по параметру ξ. При значениях скорости роста выше критического выполняется условие (1.3). Определение этого параметра будет получено в процессе исследования.

2. Оценки вероятности отказа

Обозначения.

$n_i(t)$ — число элементов сети типа "i" находящихся в состоянии «исправен» на такте работы t.

$$h_i(t) =_{def} prob\{\forall t' \le t \quad n_i(t') > 0\} \tag{2.1}$$

Тогда

$$h_i(t) = \Sigma_{n=1,\ldots,m_i} \quad prob\{n_i(t) > 0 \mid n_i(t-1) = n \,\&\, \forall t' < t-1 \quad n_i(t') > 0\} \cdot prob\{n_i(t-1) = n \,\&\, \forall t' < t-1 \quad n_i(t') > 0\}; \tag{2.2}$$

$$h_i(t) = (\Sigma_{n=1,\ldots,m_i} \quad prob\{n_i(t) > 0 \mid n_i(t-1) = n\} \cdot \\ \cdot\, prob\{n_i(t-1) = n \mid \& \forall t' < t-1 \quad n_i(t') > 0\})h_i(t-2); \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. При $p < 1-q$ зависимость $prob\{n_i(t) = 0 \mid n_i(t-1) = n\}$ от параметра $n = 1,\ldots,m_i$ антимонотонна в обоих режимах RD и DR. В режиме DR антимонотонность при любых значениях вероятностей разрушения и восстановления.

Доказательство. Рассмотрим режим RD. Тогда, если k — число элементов, которые были восстановлены до начала нового разрушения,

$$prob\{n_i(t) = 0 \mid n_i(t-1) = n\} = \sum_{k=0}^{m_i-n} q^k (1-q)^{m_i-n-k} p^{n+k} =_{def} u(n);$$

$$u(n) - u(n+1) = (1-q)^{m_i-n}\left(\frac{pq}{1-q}\right)^{m_i-n}\left(\frac{p}{1-q}\right)^{n} +$$

$$+(1-q)^{m_i-n}\sum_{k=0}^{m_i-n-1}\left(\left(\frac{pq}{1-q}\right)^{k}\left(\frac{p}{1-q}\right)^{n} - \left(\frac{pq}{1-q}\right)^{k}\left(\frac{p}{1-q}\right)^{n+1}\right) > 0$$

Первый член этого выражения соответствует значению k, которое есть при значении параметра n, но отсутствует при $n+1$. Разность под знаком суммы соответствует k, общим для обоих значений параметра. Неравенство следует из условия теоремы $p/(1-q) < 1$. Это доказывает антимонотонность функции $u(n)$.

Рассмотрим режим DR. Для этого случая $prob\{n_i(t) = 0 \mid n_i(t-1) = n\} = p^n (1-q)^{m_i}$.

Эта функция всегда антимонотонна.

При выполнении условий теоремы 2.1 для любого $n = 1,\ldots,m_i$

$$prob\{n_i(t)>0\,|\,n_i(t-1)=n\,\}\geq prob\{n_i(t)>0\,|\,n_i(t-1)=1\,\};\ (2.4)$$

$$prob\{n_i(t)=0\,|\,n_i(t-1)=1;\,RD\,\}=p(1-q)^{m_i-1};\ \text{(режим RD)}\ (2.5)$$

$$prob\{n_i(t)=0\,|\,n_i(t-1)=1;\,DR\,\}=p(1-q)^{m_i}\,;\ \text{(режим DR)}\quad (2.6)$$

Поэтому, соответственно, для любого $n=1,\ldots,m_i$

$$\begin{aligned}&prob\{n_i(t)>0\,|\,n_i(t-1)=1;\,RD\}=1-p(1-q)^{m_i-1}\ ;\\&prob\{n_i(t)>0\,|\,n_i(t-1)=1;\,DR\,\}=1-p(1-q)^{m_i}\ ;\end{aligned}\qquad (2.7)$$

С учетом (2.3)(2.7) и условия $n_i(0)=m_i\,,\quad h_i(0)=1$

$$\begin{aligned}&h_i(t)\geq(1-p(1-q)^{m_i-1}\,)^t,\quad(\mathrm{mod}\ RD);\\&h_i(t)\geq(1-p(1-q)^{m_i}\,)^t,\quad(\mathrm{mod}\ DR);\end{aligned}\qquad (2.8)$$

Верна оценка для любого $n=1,\ldots,m_i$

$$prob\{n_i(t)>0\,|\,n_i(t-1)=n\,\}\leq prob\{n_i(t)>0\,|\,n_i(t-1)=m_i\,\};\qquad (2.9)$$

$$prob\{n_i(t)=0\,|\,n_i(t-1)=m_i;\,RD\,\}=p^{m_i}\,;\qquad (2.10)$$

$$prob\{n_i(t)=0\,|\,n_i(t-1)=m_i;\,DR\,\}=(\,p(1-q))^{m_i}\ ;\qquad (2.11)$$

$$\begin{aligned}&prob\{n_i(t)>0\,|\,n_i(t-1)=m_i;\,RD\}=1-p^{m_i}\ ;\\&prob\{n_i(t)>0\,|\,n_i(t-1)=m_i;\,DR\,\}=1-(\,p(1-q))^{m_i}\ ;\end{aligned}\qquad (2.12)$$

Тогда из (2.9)(2.12)

$$\begin{aligned}&h_i(t)\leq(1-p^{m_i}\,)^t,\quad(\mathrm{mod}\ RD);\\&h_i(t)\leq(1-(\,p(1-q))^{m_i}\,)^t,\quad(\mathrm{mod}\ DR);\end{aligned}\qquad (2.13)$$

Поскольку разрушения и восстановления элементов разных типов происходят независимо, то вероятность безотказной работы системы

$$h(t) = h_1(t) \cdot \ldots \cdot h_K(t) \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &((1-p(1-q)^{m_1-1}) \cdot \ldots \cdot (1-p(1-q)^{m_K-1}))^t \le h(t) \le \\ &\le ((1-p^{m_1}) \cdot \ldots \cdot (1-p^{m_K}))^t, \quad (\mathrm{mod}\, RD); \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} &((1-p(1-q)^{m_1}) \cdot \ldots \cdot (1-p(1-q)^{m_K}))^t \le h(t) \le \\ &\qquad \le ((1-(p(1-q))^{m_1}) \cdot \ldots \cdot (1-(p(1-q))^{m_K}))^t, \quad (\mathrm{mod}\, DR); \end{aligned} \tag{2.16}$$

Теорема 2.2. Если выполнено условие антимонотонности (теорема 2.1), то вероятность сохранения заданное время каждого типа элементов сети заключена между двумя геометрическими прогрессиями (2.8) и (2.13), зависящими от режима работы сети. В режиме DR обе оценки выше. Для вероятности отказа сети в зависимости от режима верны оценки (2.15) или (2.16), также геометрические прогрессии.

3. Фазовый переход в растущей сети

Рассмотрим растущую корпоративную сеть, в которой

$$m_i = m_i(t), i = 1, \ldots, K; t = 0, 1, \ldots; \tag{3.1}$$

Ниже проводится исследование, при каком темпе роста числа элементов каждого типа возникает положительная вероятность безотказной работы сети неограниченное время.

Используем нижнюю оценку (2.7)(2.8). Обозначим

$$\begin{aligned} &V_i(t) = prob\{n_i(t) > 0 \mid n_i(t-1) = 1\}; \\ &V(t) = V_1(t) \cdot \ldots \cdot V_K(t); \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$h(T) \ge V(1) \cdot \ldots \cdot V(T) \tag{3.3}$$

Из (2.7) следует

$$\begin{aligned} &prob\{n_i(t) > 0 \mid n_i(t-1) = 1;\, RD\} = 1 - p(1-q)^{m_i(t)-1}; \\ &prob\{n_i(t) > 0 \mid n_i(t-1) = 1;\, DR\} = 1 - p(1-q)^{m_i(t)}; \end{aligned} \tag{3.4}$$

Определим

$$H =_{def} \lim_{T\to\infty} h(T) \qquad (3.5)$$

Из (3.3)

$$h(T) =_{def} \prod_{i-1}^{K} h_i(T) \geq \prod_{t=1}^{T}\prod_{i=1}^{K} V_i(t) = \prod_{i=1}^{K}\prod_{t=1}^{T} V_i(t)\,; \qquad (3.4)$$

$$H_i =_{def} \lim_{T\to\infty} h_i(T);$$

$$H = \prod_{i=1}^{K} H_i; \qquad (3.5)$$

Исследуем вопрос, когда $H > 0$. По (3.5) для этого необходимо и достаточно, чтобы все $H_i > 0, i = 1,\ldots,K;$. Поэтому надо определить критическую скорость роста для числа элементов одного типа.

$$h_i(T) \geq \prod_{t=1}^{T} V_i(t); \qquad (3.6)$$

$$H_i > 0 \Leftarrow \prod_{t=1}^{\infty} V_i(t) > 0 \Leftrightarrow -\sum_{t=1}^{\infty} \ln(V_i(t)) < \infty \qquad (3.7)$$

Используем (3.4) для режима DR.

$$\ln(V_i(t)) = \ln(1 - p(1-q)^{m_i(t)}) = -p(1-q)^{m_i(t)} + o(p(1-q)^{m_i(t)}) \quad (3.8)$$

Последнее неравенство (3.7) в силу (3.8) эквивалентно условию

$$\sum_{t=1}^{\infty} (1-q)^{m_i(t)} < \infty \qquad (3.9)$$

Это и есть условие на скорость роста $m_i(t)$, которое необходимо и достаточно для положительной вероятности неограниченной безотказной работы сети. Для режима RD условие совпадает. Для введения параметра скорости роста сети выберем (произвольно) степенную шкалу для оценки сходимости ряда (3.9).

$$(1-q)^{m_i(t)} \sim t^c \tag{3.10}$$

Тогда условие (3.9) соответствует $c < -1$.

$$m_i(t) \sim c \cdot \ln(t) / \ln(1-q) \tag{3.11}$$

Аналогично, используем верхнюю оценку (2.13)

$$\begin{aligned} &prob\{n_i(t) > 0 \mid n_i(t-1) = m_i;\, RD\} = 1 - p^{m_i(t)}\,; \\ &prob\{n_i(t) > 0 \mid n_i(t-1) = m_i;\, DR\} = 1 - (p(1-q))^{m_i(t)}\,; \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} &W_i(t) = prob\{n_i(t) > 0 \mid n_i(t-1) = 1\}; \\ &W(t) = W_1(t) \cdot \ldots \cdot W_K(t); \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$h(T) \le W(1) \cdot \ldots \cdot W(T) \tag{3.14}$$

Из (3.5) следует

$$H_i = 0 \Leftarrow \prod_{t=1}^{\infty} W_i(t) = 0 \Leftrightarrow -\sum_{t=1}^{\infty} \ln(W_i(t)) = \infty \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} &\ln(W_i(t)) = \ln(1 - (p(1-q))^{m_i(t)}) = \\ &= -(p(1-q))^{m_i(t)} + o((p(1-q))^{m_i(t)}) \; (\mathrm{mod}\; DR); \\ &\ln(W_i(t)) = \ln(1 - p^{m_i(t)}) = -p^{m_i(t)} + o(p^{m_i(t)}) \; (\mathrm{mod}\; RD); \end{aligned} \tag{3.16}$$

Поэтому условие (3.15) соответствует

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{\infty} (p(1-q))^{m_i(t)} = \infty \quad (\mathrm{mod}\; DR); \\ &\sum_{t=1}^{\infty} p^{m_i(t)} = \infty \quad (\mathrm{mod}\; RD); \end{aligned} \tag{3.17}$$

Для степенной шкалы скорости роста

$$
\begin{aligned}
&(p(1-q))^{m_i(t)} \sim t^c \quad (\operatorname{mod} DR);\\
&p^{m_i(t)} \sim t^c \quad (\operatorname{mod} RD);
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_i(t) \sim c \cdot \ln(t)/\ln(p(1-q)) \quad (\operatorname{mod} DR);\\
&m_i(t) \sim c \cdot \ln(t)/\ln(p) \quad (\operatorname{mod} RD);
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Расходимость рядов (3.17) соответствует условию $c \geq -1$. Знак ~ означает равенство с точностью до аддитивной константы для m (3.19) и до коэффициента для p^m (3.18).

Теорема 3.1. Если выполнено условие (3.9), то имеется положительная вероятность безотказной работы корпоративной сети неограниченное время. Если выполнено условие (3.17), то с вероятностью 1 отказ сети наступит за конечное число тактов.

Замечание 3.1. Условия (3.9) и (3.17) выделяют некоторый диапазон последовательностей $m_i(t)$, для которых оба условия нарушены. Для этих последовательностей использованный метод анализа не дает оценки вероятности неограниченной безотказной работы. Условие (3.9) выполняется для всех достаточно быстро растущих последовательностей, а условие (3.17) ограничивает рост сверху. При выполнении условия теоремы 2.1 гарантируется, что эти условия не совместны.

Теорема 3.2. Если принять параметрический закон роста

$$m_i(t) \sim \xi \cdot \ln(t), \tag{3.20}$$

то критическая точка параметра $\xi = \xi_k$ заключена в интервале

$$
\begin{aligned}
&\xi_0 \leq \xi_k \leq \xi_c = \ln^{-1}(1-q)^{-1},\\
&\xi_0 = \ln^{-1}(p(1-q))^{-1} \quad (\operatorname{mod} DR),\\
&\xi_0 = \ln^{-1} p^{-1} \quad (\operatorname{mod} RD);
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Фазовый переход отказоустойчивости корпоративной сети по скорости роста имеет вид:

$$\begin{aligned} &\xi > \xi_c \Rightarrow H_i > 0; \\ &\xi \le \xi_0 \Rightarrow H_i = 0; \end{aligned} \qquad (3.22)$$

Доказательство обеих теорем содержится в (3.1—3.19)

Замечание 3.2. Внутри указанного интервала значений критической точки (3.21) использованный метод анализа не дает информации о поведении вероятности отказа.

Замечание 3.3. Выбор степенной шкалы роста является произвольным. В каждом параметрическом классе функций условие (3.9) будет соответствовать специфичной критической точке и особой зависимости числа элементов сети от времени. Сами условия (3.9) и (3.17) не параметрические. На классе всех последовательностей нет границы между сходящимися и расходящимися последовательностями. Однако можно говорить о двух подмножествах последовательностей $m_i(t)$: либо ряд (3.9) бесконечен, либо ряд имеет конечный положительный предел. Случай отсутствия предела или неположительного предела невозможен, поскольку все члены ряда положительны. То же верно и для рядов (3.17). В этом смысле можно говорить о непараметрическом фазовом переходе.

Работа поддержана РФФИ, проект № 04-01-00363

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: "Мир", 1975.
2. Коганов А. В. Индукторные пространства как средство моделирования // Вопросы кибернетики (Алгебра, Гипергеометрия, Вероятность, Моделирование). 1999, С. 119-181.
3. Коганов А.В., Сазонов А.Н. Анализ отказоустойчивости вычислительной среды корпоративного типа. // Сб. “Математика.

Компьютер. Образование”, Вып. 13, часть 2, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Труды международной конференции, М.-Ижевск, 2006, с.с. 228-234
5. Коганов А.В., Сазонов А.Н. Анализ отказоустойчивости вычислительной среды планетарного типа. // Сб. “Математика. Компьютер. Образование”, Вып. 13, часть 2, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Труды международной конференции, М.-Ижевск, 2006, с.с. 235-248.

CORPORATE COMPUTER NETWORKS WITH DESTRUCTION AND RESTORATION. PHASE TRANSITION IN GROWING NETWORKS

Koganov A. V., Sazonov A. N.

Fault tolerance of the finite computer network with full graph which elements have probability of refusal and probability of restoration after refusal is investigated. The analytical estimation of probability of non-failure operation of a network as a whole is given during set time in view of possible redistribution of functions between elements of one kind. For growing networks presence of phase transition on parameter of rate of growth is proved. At fast enough growth the network has positive probability of unlimited non-failure operation.