О СЛАБОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ НЕКОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП

Додонова Н. Л.

(Россия, Самара)

Исследуется слабая двойственность полугрупп относительно некоммутативной полугруппы. Приводится пример некоммутативных слабо двойственных полугрупп.

Понятие слабой двойственности можно рассматривать как обобщение понятия двойственности полугрупп.

Приведем некоторые определения. Если *C* – коммутативная полугруппа, то через $Hom(A,C)$ обозначим полугруппу всех гомоморфизмов полугруппы *A* в полугруппу *C* относительно умножения, определенного следующим образом $(\chi_1\chi_2)(a)=\chi_1(a)\chi_2(a)$, для любых $a\in A$ и $\chi_1,\chi_2\in Hom(A,C)$.

Говорят, что полугруппа *A* двойственна относительно коммутативной полугруппы *C*, если гомоморфизм $\omega: A\to Hom(Hom(A,C),C)$ по правилу $[\omega(a)](\chi)=\chi(a)$ является биективным. Здесь двойственными объектами выступают полугруппы *A* и $Hom(A,C)$.

Если же гомоморфизм ω является лишь инъективным, то полугруппы *A* и $Hom(A,C)$ назовем слабо двойственными относительно полугруппы *C*.

Таким образом, ослабление требований к гомоморфизму ω в определении двойственности расширяет класс исследуемых объектов.

Вопросы двойственности групп и полугрупп рассматривались в работах Л.С. Понтрягина [1], Э. Хьюитта и Г. Цукермана [2], М.М. Лесохина [3]. Слабая двойственность полугрупп исследовалась в работах А.В. Попырина, Е.В. Богачевой, В.Р. Бариновой, Н.Л. Бобрышовой и др.

Однако в предложенной формулировке понятие слабой двойственности полугрупп можно рассматривать лишь относительно коммутативной полугруппы С, так как в противном случае множество всех гомоморфизмов полугруппы А в полугруппу С относительно умножения, определенного указанным образом, не образует полугруппу. Дадим более общее определение слабо двойственных полугрупп. Напомним, что отображение $f : A \times B \to C$ декартова произведения полугрупп А и В в полугруппу С называется билинейным, если для любых элементов $a, a_1, a_2 \in A$ и $b, b_1, b_2 \in B$ выполнены условия $f(a_1 \cdot a_2, b) = f(a_1, b) \cdot f(a_2, b)$ и $f(a, b_1 \cdot b_2) = f(a, b_1) \cdot f(a, b_2)$.

Определение. Полугруппы *A* и *B* называются слабо двойственными относительно полугруппы *C*, если существует билинейное отображение

$$f : A \times B \to C,$$

такое что выполнены условия:

1) для любых $a_1, a_2 \in A\, (a_1 \neq a_2)$, существует $b \in B$ такой, что $f(a_1, b) \neq f(a_2, b)$;

2) для любых $b_1, b_2 \in B\, (b_1 \neq b_2)$, существует $a \in A$ такой, что $f(a, b_1) \neq f(a, b_2)$.

Следующее утверждение доказывает эквивалентность данных определений слабо двойственных полугрупп в случае коммутативности полугруппы *C*, [3].

Утверждение. Полугруппы *A* и *B* слабо двойственны относительно коммутативной полугруппы *C* тогда и только тогда, когда существует изоморфное вложение $\varphi : A \to Hom(B, C)$, которое отделяет элементы из *B*, то есть, если $b_1, b_2 \in B$ и $b_1 \neq b_2$, то найдется такой элемент $\chi \in \varphi(A)$, что $\chi(b_1) \neq \chi(b_2)$.

Целью настоящей статьи является построение примера некоммутативных слабо двойственных полугрупп

Пример. В качестве полугруппы C выберем полугруппу левых нулей, $L_2 = \{l_1, l_2 \mid l_i \cdot l_j = l_i, i = 1, 2, j = 1, 2\}$. Рассмотрим также полугруппу $L_3 = \{l_1, l_2, l_3 \mid l_i \cdot l_j = l_i, i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}\}$.

Покажем, что полугруппы L_3 и L_2 слабо двойственны относительно L_2. Для этого зададим отображение $f : L_3 \times L_2 \to L_2$ следующим образом

$(l_1, l) \to l_1, (l_2, l) \to l_2$, для любого $l \in L_2$ и $(l_3, l_1) \to l_1, (l_3, l_2) \to l_2$.

Непосредственная проверка убеждает, что построенное отображение будет билинейным.

Убедимся, что отображение $f : L_3 \times L_2 \to L_2$ удовлетворяет определению слабо двойственных полугрупп, то есть

1) для любых $l_i, l_j \in L_3$ $(i \neq j)$, существует $l \in L_2$ такой, что $f(l_i, l) \neq f(l_j, l)$;

2) для любых $l_i, l_j \in L_2$ $(i \neq j)$, существует $l \in L_3$ такой, что $f(l, l_i) \neq f(l, l_j)$.

Действительно, для $l_1, l_2 \in L_3$ любой элемент $l \in L_2$ удовлетворяет условию 1). Для $l_1, l_3 \in L_3$ таким элементом будет $l_2 \in L_2$, а для $l_2, l_3 \in L_3$ — $l_1 \in L_2$.

Условие 2) выполнено, так как для элементов $l_1, l_2 \in L_2$ элемент $l_3 \in L_3$ будет разделять образы $f(l_3, l_1) \neq f(l_3, l_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные труды.Т.1: Об алгебраическом содержании топологических теорем двойственности. –М.: Наука, 1988.
2. Hewitt E, Zuckerman H. Finite dimensional convolution algebras// Acta Math. –1955. –V. 93. -№1-2. p.67-119.
4. Лесохин М.М. О двойственности коммутативных полугрупп // Тез. Кратких сообщений. Международный конгресс математиков. – М., 1966. С 46.

ON WEAK DUALITY OF NONCOMMUTATIVE SEMIGROUPS

Dodonova N. L.

Weak duality of noncommutative semigroups is considered. An example of weak duality for a noncommutative semigroups is presented.