# О МОДЕЛИРОВАНИИ И ОПТИМИЗАЦИИ РАБОТЫ ПРЕДПРИЯТИЙ В КУРСЕ «ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

**Назипова А. Н.**

(Россия, Набережные Челны)

*Основная задача при моделировании и оптимизации работы предприятий — максимизация прибыли. Реализация оптимизационных расчетов наталкивается на ряд трудностей: сложность процесса производства и планирования отрасли, связанные с многономенклатурностью производства, многостадийностью технологического процесса. В статье описаны: экономическая и математическая постановка задачи, алгоритмы метода декомпозиции Данцига-Вулфа, сравнение алгоритмов, экономическая интерпретация метода. Предлагается методика проведения практических занятий по теме «Моделирование и оптимизация работы предприятий».*

**Введение.** Студенты специальности «Математические методы в экономике» изучают курс «Экономико-математическое моделирование». Этот курс является относительно новым: утвержден 14.04.2000г. Как следствие, является отсутствие в задачниках по курсу «Экономико-математическое моделирование» некоторых тем, утвержденных в стандарте.

Рассмотрим методику проведения практических занятий по теме «Моделирование и оптимизация работы предприятий».

Основной задачей при моделировании и оптимизации работы предприятий является задача максимизации прибыли. При этом реализация оптимизационных расчетов наталкивается на ряд трудностей: сложность процесса производства и планирования отрасли, связанные с многономенклатурностью производства, многостадийностью технологического процесса. Отличительной особенностью многих задач исследования является их большая размерность. При решении задач оптимального планирования на макроуровне, матрица ограничений достигает размерности $10^4$–$10^5$.

Задача большая по количеству переменных и ограничений может быть решена только методами декомпозиции – разложения исходной задачи на ряд задач меньшей размерности, нахождении независимых решений для каждой из них и последующей увязке этих частных решений в общее решение исходной задачи.

**Цель данной методики.** Представить теоретический материал по данной теме в качестве ориентира проводимых студентами исследований. В процессе обучения, путем формирования навыков у студентов необходимо выработать ряд знаний и умений, позволяющих решать задачи представленного типа. Научить студентов: использовать полученные знания для проведения собственных исследований; приобретать навыки исследовательской работы в процессе изучения предмета исследования, при подготовке собственных выводов; представлять свои выводы при публичных выступлениях.

**Экономическая постановка задачи.** Имеется большая экономическая система (объединение), состоящая из N подсистем (филиалов), при этом каждый филиал действует независимо от остальных, но план, цены, показатели стимулирования хозяйственной деятельности взаимоувязаны. Требуется определить оптимальный вариант производственной программы объединения, обеспечивающий получение максимальной прибыли объединения.

**Математическая постановка задачи.** Математическая модель, описывающая задачу, имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} C^{(i)} X^{(i)} \to \max \quad , \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} A^{(1)}X^{(1)} + A^{(2)}X^{(2)} + \ldots + A^{(N)}X^{(N)} \le B \\ \tilde{A}^{(i)}X^{(i)} \le \tilde{B}^{(i)} \qquad (i = \overline{1,N}) \\ X^{(i)} \ge 0 \quad (i = \overline{1,N}) \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $i$ — индекс филиала, входящего в систему ($i = \overline{1,N}$);
$\tilde{A}^{(i)}$ — матрица коэффициентов (норм) затрат локальных ресурсов на выпуск продукции $i$-ым филиалом;
$A^{(i)}$ — матрица коэффициентов (норм) затрат общих ресурсов на выпуск продукции $i$-ым филиалом;
$\tilde{B}^{(i)}$ — объем имеющихся ресурсов в $i$-ом филиале;
$B$ — объем общих ресурсов;
$C^{(i)}$ — вектор удельной прибыли $i$-ого филиала;
$X^{(i)}$ — вектор выпуска продукции филиалом $i$.

Пусть $D^{(i)} = \left\{ X^{(i)} \in R_{m(i)} : \tilde{A}^{(i)}X^{(i)} = \tilde{b}^{(i)} \ , \ X^{(i)} \ge 0 \quad (i = \overline{1,N}) \right\}$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество. $X_j^{(i)}$ – вершины этого множества $(i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,k(i)})$. Любую точку $X^{(i)} \in D^{(i)}$ можно представить: $X^{(i)} = \sum_{j=1}^{k(i)} Y_j^{(i)} X_j^{(i)}$, где $Y_j^{(i)} \ge 0$; $\sum_{j=1}^{k(i)} Y_j^{(i)} = 1$.

Тогда задача (1)–(2) будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{k(1)} C^{(1)}Y_j^{(1)}X_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{k(2)} C^{(2)}Y_j^{(2)}X_j^{(2)} + \ldots + \sum_{j=1}^{k(N)} C^{(N)}Y_j^{(N)}X_j^{(N)} \to \max, \tag{3}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k(1)} A^{(1)}Y_j^{(1)}X_j^{(1)} + \ldots + \sum_{j=1}^{k(N)} A^{(N)}Y_j^{(N)}X_j^{(N)} = B \ (r_0 \text{ î ãðàí è÷åí èé}) \\ \sum_{j=1}^{k(i)} Y_j^{(i)} = 1 \\ Y_j^{(i)} \ge 0 \qquad i = \overline{1,N} \ , j = \overline{1,k(i)} \end{cases} \tag{4}$$

Введем обозначения $\delta_j^{(i)} = \left\langle C^{(i)}, X_j^{(i)} \right\rangle$, $P_j^{(i)} = \begin{pmatrix} \left. A^{(i)} X_j^{(i)} \right\} r_0 \\ \left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left. 1 \right\} r(i)+i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} N \end{pmatrix}$.

С учетом этих обозначений от (3)–(4) перейдем к:

$$\sum_{j=1}^{k(1)} \delta_j^{(1)} Y_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{k(2)} \delta_j^{(2)} Y_j^{(2)} + \ldots + \sum_{j=1}^{k(N)} \delta_j^{(N)} Y_j^{(N)} \to \max \qquad (5)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{s(1)} P_j^{(1)} Y_j^{(1)} + \sum\limits_{j=1}^{s(2)} P_j^{(2)} Y_j^{(2)} + \ldots + \sum\limits_{j=1}^{s(N)} P_j^{(N)} Y_j^{(N)} = B \\ \sum\limits_{j=1}^{k(i)} Y_j^{(i)} = 1 \\ Y_j^{(i)} \geq 0 \qquad i = \overline{1, N}\ , j = \overline{1, s(i)} \end{cases} \qquad (6)$$

(5)–(6) — координирующая (главная) задача.

Оптимальное решение исходной задачи можно найти по формуле:

$$X^{*(i)} = \sum_{j=1}^{k(i)} Y_j^{*(i)} X_j^{*(i)} .$$

Задача (5)–(6) будет решаться симплекс-методом, для решения этой задачи требуется идентификация включаемых в базис и исключаемых из базиса векторов.

Смысл построения главной задачи при использовании метода декомпозиции заключается в том, что эту задачу можно решить, имея в распоряжении лишь одну экстремальную точку из всей совокупности вершин, соответствующую вводимой переменной.

Определив вершину, можно определить все элементы $P_j^{(i)}$, а также можно определить оценку $\Delta_j^{(i)}$, соответствующую этому вектору, после этого исключаемый вектор определяется обычным методом с учетом условий допустимости симплексного метода.

**Алгоритм метода декомпозиции Данцига-Вулфа с обычной координирующей задачей**

**Шаг 1.** Поставить неявно главную задачу, преобразовать ее таким образом, чтобы в ее идентифицированной постановке участвовали коэффициенты выпуклой комбинации.

**Шаг 2.** Найти начальное допустимое базисное решение модифицированной задачи, если по условию задачи сразу же такое решение найти затруднительно, то использовать процедуру, связанную с введением искусственных переменных.

**Шаг 3.** Для текущей итерации для каждого филиала определить приведенные стоимости $\rho_i$, затем найти $\rho = \min\limits_{i=1,N} \rho_i$. Проверить, является ли

\+

текущее решение является оптимальным и вычисления по алгоритму прекратить

—

**Шаг 4.** Включить вектор, соответствующий минимальной оценке $\rho<0$, в число базисных переменных КЗ, определить исключаемый из базиса вектор, учитывая условие допустимости симплекс-метода, определить новую обратную матрицу, перейти к шагу 3.

**Алгоритм метода декомпозиции Данцига-Вулфа с ограниченной координирующей задачей**

**Шаг 0**. Определить начальный базис и соответствующий ему опорный план, вычислить разрешающий множитель и оценки

**Шаг 1**. Решить N вспомогательных задач, вычислить приведенные стоимости $\rho_i$ : найти $\rho = \min\limits_{i=\overline{1,N}} \rho_i$ . Проверить, является ли $\rho \geq 0$

+ Построить оптимальный план исходной задачи

−

**Шаг 2**. Неявно поставить ограниченную координирующую задачу. Вычислить оценки, если имеются отрицательные, то вектора, соответствующие отрицательным оценкам, включить в ограниченную координирующую задачу.

**Шаг 3**. Сформулированную координирующую задачу решать до момента получения неотрицательных оценок и перейти к шагу 1.

**Сравнение алгоритмов метода декомпозиции Данцига-Вулфа.** Алгоритм метода Данцига-Вулфа с ограниченной координирующей задачей позволяет за меньший объем вычислений получить решение исходной задачи. Если размерность исходной задачи сравнительно невелика, то за одно решение N вспомогательных задач обычно можно получить решение.

**Экономическая интерпретация метода декомпозиции Данцига-Вулфа.** На нижнем уровне решаются отдельные задачи каждого филиала и на верхний уровень передаются оптимальные планы и оценки филиалов. Объединение определяет и корректирует план нижестоящих объектов. Оптимальный план объединения формируется как совокупность частных оптимумов, направленных на выполнение единой цели.

В этой схеме реализуется фундаментальное положение теории оптимального планирования: план, цены и показатели стимулирования должны быть взаимоувязаны и получаться из единого решения производственной задачи на оптимум [1].

**Заключение.** Контроль усвоения алгоритмов проводится в виде контрольной работы. Также студентам по желанию предлагается написание курсовой работы на тему «Создание приложения, реализующего два алгоритма метода Данцига-Вулфа. Сравнительный анализ алгоритмов».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лэсдон Л. Оптимизация больших систем. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975. – 432 с.

## ABOUT MODELLING AND OPTIMIZATION OF THE ENTERPRISES WORK IN THE COURSE «ECONOMIC-MATHEMATICAL MODELLING»

**Nazipova A. N.**

(Russia, Naberezhnye Chelny)

*The primary goal at modelling and optimization of the enterprises work is the problem of profit maximization. But thus realization of optimizational calculations encounters a number of difficulties: complexity of process of manufacture and planning the branches connected with the numerous nomenclature of manufacture and multiplicity of stage of technological process. In the article: economic and mathematical statement of problem, algorithms of method of decomposition of Danzig and Wolfe, comparison of algorithms, economic interpretation of method are described. The technique of carrying out of practical employment is offered to theme "Modelling and optimization of the enterprises work".*