

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ДВУХ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА «РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ» С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Якушкин Н.А.

Обнинский филиал НИЯУ МИФИ.

249035 г. Обнинск, студгородок 1. Тел (484)393-69-31. Email: ykush@mail.ru

Введение. В настоящей работе исследуется система типа «реакция-диффузия»:

$$\dot{u} = k_1 u_{ss} + au - bv + c_2 u^2 + c_3 u^3; \quad \dot{v} = k_2 v_{ss} + l(u - v), \quad (1)$$

где a, b, k_1, k_2, l - положительные параметры, s - одномерная координата, определенная на некотором интервале $[0; L]$.

Условия устойчивости. Для устойчивости постоянного решения $u_0 = v_0 = 0$ системы

(1) необходимо, чтобы оператор $D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au - bv - k_1 u_{ss} \\ lu - lv - k_2 v_{ss} \end{pmatrix}$, определенный на

пространстве непрерывных на интервале $[0; L]$ функций, был секториальным и обладал спектром, полностью лежащим левее мнимой оси. Данные условия выполняются если:

$$a \in (\alpha l; l), \quad b \in \left(a; a + \frac{(a - \alpha l)^2}{4\alpha} \right), \quad \text{где } \alpha = \frac{k_1}{k_2}.$$

Резонансные значения. Отметим, что собственные функции оператора D имеют вид

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \cos \omega s. \quad \text{Пусть значения параметров } a, b \text{ принадлежат границе области}$$

диффузионной неустойчивости т.е. $a \in (\alpha l; l), b = a + \frac{(a - \alpha l)^2}{4\alpha}$. Тогда, если $\omega = \sqrt{\frac{a - \alpha l}{2\alpha}}$, одно из собственных значений оператора D равно нулю. С другой стороны, $\omega = \pi / L$.

Поэтому $L = \pi \sqrt{\frac{2\alpha}{a - \alpha l}}$. Такие значения параметра L называются резонансными.

Тип бифуркации потери устойчивости. В невырожденном случае, мягкость или жесткость бифуркации потери устойчивости постоянного решения u_0, v_0 системы (1)

определяется значением первой ляпуновской величины: $\gamma_1 = 4c_2^2 \frac{a - 4\alpha l}{9\alpha l(b - a)} + 3c_3$.

Если $\gamma_1 < 0$ - бифуркация мягкая, если $\gamma_1 > 0$ - жесткая.

Диссипативные структуры. Посредством численных экспериментов было обнаружено, что в результате бифуркации Тьюринга [1] в системе (1), дополненной начальными условиями: $u(s, 0) = \varphi(s), v(s, 0) = \psi(s)$, где $\varphi(s), \psi(s)$ - непрерывные функции, а также, краевыми условиями: $u_s|_{s=0, L} = v_s|_{s=0, L}$, возникают различные диссипативные структуры. Например, стоячие волны, имеющие форму, близкую к синусоиде или к ломаной линии, все углы которой – прямые.

Литература

1. A.M. Turing The chemical basis of morphogenesis.// Philos.Trans. R. Soc. London. B. Biol. Sci. 1952. 37-72.