ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА, СОДЕРЖАЩЕГО УСЛОВНЫЕ СРЕДНИЕ

Курушина С.Е., Максимов В.В.[1]

Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С.П. Королева, Россия, 443096, г.Самара, Московское ш. 34, (846)2674530, kurushina72@gmail.com
[1]Самарский государственный университет путей сообщения, Россия, 443066, г.Самара, 1-й Безымянный пер. 18а, vvmaksimov52@mail.ru

Следуя работе [1] предложен численный метод решения уравнения Фоккера-Планка (УФП)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} - r_\alpha(x,t)w \right) = \sum_{\alpha=1}^{m} L_\alpha w, \qquad k_\alpha(x,t) > 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1,...,x_m)$, $k_\alpha(x,t) = \varepsilon_\alpha + G_\alpha^2\theta_\alpha$, $\varepsilon_\alpha, \theta_\alpha, D_\alpha$ - постоянные, $\varepsilon_\alpha > 0,\ \theta_\alpha > 0, D_\alpha > 0$

$$r_\alpha(x,t) = -P_\alpha - D_\alpha[M(x_\alpha | x_1,...,x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1},...,x_m) - x_\alpha] + \theta_\alpha G_\alpha \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_\alpha}, P_\alpha = P_\alpha(x),\ G_\alpha = G_\alpha(x),$$

содержащего условные средние

$$\begin{aligned} M(x_\alpha | x_1,...,x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1},...,x_m) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_\alpha w(x_\alpha | x_1,...,x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1},...,x_m, t) dx_\alpha, \\ w(x_\alpha | x_1,...,x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1},...,x_m, t) &= w(x_1,...,x_m,t) \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} w(x_1,...,x_\alpha,...,x_m,t) dx_\alpha . \end{aligned} \tag{2}$$

Такого вида УФП возникают при исследовании шумоиндуцированных переходов в стохастических пространственно распределенных системах с использованием приближения среднего поля (MFT). Проведено тестирование метода на одномерных задачах, одна из которых имеет аналитическое решение, вторая решена численно методом распределенных аппроксимационных функционалов (DAF) на базе полиномов Эрмита [2].

На тестовых задачах показано, что точность решения, полученного с помощью предложенной схемы выше, чем в DAF-методе в соответствующем порядке аппроксимации по времени, особенно в стационарном состоянии и в моменты времени, близкие к начальному. Кроме того, схема асимптотически (при больших временах) сохраняет условие нормировки вероятности на единицу и обеспечивает положительность значений плотности вероятности в области, где решение близко к разрывному.

Литература

1. *Кареткина Н.В.* Безусловно устойчивая разностная схема для параболичеких уравнений, содержащих первые производные // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2**0**, 1, 1980. Стр. 236–240.
2. *Zang D.S., Wei G.W., Kouri D.J., Hoffman D.K.* Numerical method for the nonlinear Fokker-Planck equation // Phys. Rev. E. **56**, 1997. Pp. 1197-1206.