

ПОСТРОЕНИЕ ГЛАДКОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ, ВСЮДУ БИФУРКАЦИОННОГО В ОБЛАСТИ ЕВКЛИДОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Коганов А.В.

(Москва)

В работе строится пример гладкого векторного поля в евклидовом пространстве, которое в каждой точке области полной размерности допускает ветвление касательных полю траекторий. Такое поле соответствует дифференциальному уравнению, решения которого неустойчивы в каждой точке области, и при этом заполняют всю область. Модели этого типа позволяют описывать процессы в биологических и социальных системах, которые подвержены в каждый момент волевому воздействию, порожденному их внутренними силами, и поэтому в любой точке траектории допускают не единственное продолжение даже при отсутствии существенных внешних влияний. Поле строится в форме фрактала, как индуктивный предел стереотипных построений, выполненных в разных масштабах.

Задачей данной работы является формирование аппарата построения дифференциальных уравнений, позволяющих описывать системы, обладающие фактором свободного (в некоторых пределах) выбора своего поведения в каждый момент времени. При этом существенно, что выбор не является функцией внешнего управления процессом, а формируется самой системой по внутренним законам. Такие системы должны описываться дифференциальными уравнениями, допускающими ветвление траектории решения в каждой точке пространства состояний. Такие системы типичны для биологии и социологии, но отсутствие необходимого математического аппарата часто порождает неадекватный объекту детерминизм моделей.

Достаточно построить пример гладкого векторного поля, имеющего бифуркации касательных траекторий на всюду плотном множестве в области R^2 . Тогда в произвольной размерности, превышающей 2, можно сделать расслоение на параллельные плоскости и построить цилиндрическую область с двух-

мерным основанием, параллельным расслоению, после чего, на основании построить всюду бифуркационное векторное поле, и параллельно перенести его на каждый слой цилиндра. Полученное векторное поле также будет иметь бифуркации в каждой точке цилиндра. Далее мы усилим требования к бифуркации, чтобы получить полноразмерное ветвление траекторий. Но в основе решения все равно будет лежать двухмерная модель.

Пример будет построен в форме фрактала. Элементом фрактала будет область, ограниченная двумя гладкими линиями, касательными в двух точках, и этими точками касания. Линии будут ориентированы согласовано, т.е. их ориентация в точках касания будет совпадать. Такую область, вместе с граничными линиями, будем называть клеткой. Шаг фрактальной конструкции будет состоять в том, что каждая клетка, полученная на предыдущем шаге, будет разбита на более мелкие клетки. При этом граничные линии исходной клетки будут ограничивать (частично) и некоторые из новых клеток. Будет доказано, что возникающее поле направлений граничных линий непрерывно на всюду плотном множестве в области построения. Тогда его можно продолжить по непрерывности на всю область. Поскольку диаметры клеток стремятся к нулю, то построенное векторное поле будет иметь бифуркацию в каждой точке области. Начинать построение можно с одной произвольной клетки.

Построение векторного поля. Начальные параметры построения.

Зададим на плоскости декартову систему координат X,Y.

Начальная клетка ограничена линиями

$$f_1(x)=y=(1-\cos(x)); \tag{1.1}$$

$$f_2(x)=y=(\cos(x)-1); \tag{1.2}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi. \tag{1.3}$$

$$f_1(0)=f_2(0); f_1(2\pi)=f_2(2\pi); \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dx} f_1(0)=\frac{d}{dx} f_2(0); \frac{d}{dx} f_1(2\pi)=\frac{d}{dx} f_2(2\pi); \tag{1.5}$$

Область задана неравенствами

$$0 \leq x \leq 2\pi; \tag{2.1}$$

$$f_1(x) \leq y \leq f_2(x). \tag{2.2}$$

Направление обеих линий зададим в сторону возрастания переменной x . (См. рис.1.)

Для проведения шага фрактального построения нам потребуется ввести две функции.

Функция “*продольного дробления* клетки”:

$$m(n), n=1,2,\dots; m(n) \in \mathbb{N}; \quad (3.1)$$

$$m(n) \leq m(n+1), n=1,2,\dots; \quad (3.2)$$

Значения функции — натуральные числа. Требуем от нее монотонного роста. Позднее будут наложены условия достаточно быстрого роста.

Функция “*поперечного дробления* клетки”:

$$z(t) = (1 + \cos(\pi t))/2, 0 \leq t \leq 1. \quad (4.1)$$

Существенны следующие свойства. При изменении параметра t от 0 до 1 значение $z(t)$ монотонно и гладко меняется от 1 до 0. На концах отрезка производные dz/dt обнуляются. Производная везде определена и неположительная, и ее абсолютное значение ограничено. Возможно использование и другой функции с этими свойствами (рис.2).

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=1} = 0 \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{0 < t < 1} < 0 \quad (4.3)$$

$$\left| \left. \frac{dz}{dt} \right| \leq \pi/2 = \left| \left. \frac{dz}{dt} \right|_{z(1/2)} \right| \quad (4.4)$$

$$z(0) = 1; z(1) = 0; 0 < z(t) < 1 |_{0 < t < 1}. \quad (4.5)$$

На каждом шаге будут возникать новые клетки. Совокупность клеток, возникших на очередном шаге, назовем поколением клеток с номером шага. Нулевое поколение состоит из одной начальной клетки (1)(2). Шаг состоит из разбиения каждой клетки предыдущего поколения на несколько новых клеток. Число таких элементов разбиения будет равно $2m(n)$, где n — номер нового поколения. Таким образом, общее число клеток поколения n равно

$$P(n) = 2m(n)P(n-1) \quad (5)$$

При строгом возрастании функции продольного деления клетки зависимость $P(n)$ гипергеометрическая.

Описание шага построения.

Для описания одного шага достаточно описать в общем виде разбиение произвольной клетки.

Пусть некоторая клетка последнего завершённого поколения (с номером n) имеет ограничивающие линии вида

$$y_1=Y_1(x); \tag{6.1}$$

$$y_2=Y_2(x); \tag{6.2}$$

где

$$a \leq x \leq b, Y_1 \leq Y_2. \tag{6.3}$$

$$dY_1/dx|_{x=a} = dY_2/dx|_{x=a} \tag{6.4}$$

$$dY_1/dx|_{x=b} = dY_2/dx|_{x=b} \tag{6.5}$$

$$Y_1(a) = Y_2(a) \tag{6.6}$$

$$Y_1(b) = Y_2(b) \tag{6.7}$$

Вначале проводится деление клетки на $m(n)$ частей, которое назовем продольным. Оно задается дополнительными линиями, число которых равно $(m(n)-1)$

$$y=G_k(x)=(1-k/m(n))Y_1(x)+(k/m(n))Y_2(x), \tag{7.1}$$

где $k=0_m(n), a \leq x \leq b$.

$$G_0=Y_1, G_{m(n)}=Y_2. \tag{7.2}$$

Новые клетки, ограниченны парами линий

$$G_k(x), G_{k+1}(x), k=0_m(n)-1; G_k \leq G_{k+1}. \tag{7.3}$$

Назовем их клетками продольного деления исходной клетки Y_1, Y_2 и клетками полупоколения $n+1/2$. Для них выполнены условия

$$G_k(a)=G_{k+1}(a); G_k(b)=G_{k+1}(b); \tag{7.4}$$

$$d/dx G_k(a)=d/dx G_{k+1}(a); d/dx G_k(b)=d/dx G_{k+1}(b); \tag{7.5}$$

Таким образом, на концах отрезка общей области определения всех граничных линий полупоколения одной клетки их значения и производные совпадают. Условия (7.4)(7.5) аналогичны условиям (6.4) — (6.7) и (1.4)(1.5).

На следующей стадии построения каждая клетка полупоколения делится на две новые клетки. Это деление назовем попе-

речным. В результате получаем клетки нового поколения.

Допустим некоторая клетка полупоколения ограничена линиями вида (6):

$$g=G_k(x), q=G_{k+1}(x), a \leq x \leq b; g \leq q. \quad (8)$$

Новые клетки получают путем проведения внутри исходной клетки одной линии $y=p(x)$, разделяющей ее надвое. Эта линия строится с использованием функции $z(t)$ поперечного дробления клетки (4.1). Область определения новой линии

$$A=a+(b-a)/3 \leq x \leq a+2(b-a)/3=B. \quad (9.1)$$

$$B-A=(b-a)/3.$$

$$p(x)=g(x)z(3(x-A)/(b-a))+q(x)(1-z(3(x-A)/(b-a))). \quad (9.2)$$

$$p(x)=g(x)z(t)+q(x)(1-z(t)), \quad (9.3)$$

$$t=t(x)=3(x-A)/(b-a); x=A+t(b-a)/3. \quad (9.4)$$

$$p'(x)=\frac{d}{dx}p(x)=g'(x)z(t)+g(x)z'(t)t'(x)+q'(x)(1-z(t))-q(x)z'(t)t'(x). \quad (9.5)$$

$$z'(t)t'(x)=\left(\frac{3\pi}{(a-b)}\right)\sin\left(\frac{3\pi(x-A)}{(b-a)}\right) \quad (9.6)$$

$$z't'|_{x=A}=z't'|_{x=B}=0; \quad (9.7)$$

$$p'(A)=g'(A); p'(B)=q'(B). \quad (9.8)$$

Таким образом, линия $y=p(x)$ гладко сопрягается (касается) с линиями $y=g(x)$ и $y=q(x)$ в точках пересечения. Две новые клетки ограничены линиями (10) и (11) соответственно:

$$Y_3(x)=g(x) \mid_{a \leq x \leq B}; \quad (10.1)$$

$$Y_4(x)=q(x) \mid_{a \leq x \leq A}, p(x) \mid_{A \leq x \leq B}; \quad (10.2)$$

$$a \leq x \leq B; Y_3 \leq Y_4. \quad (10.3)$$

$$Y_5(x)=p(x) \mid_{A \leq x \leq B}, g(x) \mid_{B \leq x \leq b}; \quad (11.1)$$

$$Y_6(x)=q(x) \mid_{A \leq x \leq b}; \quad (11.2)$$

$$A \leq x \leq b; Y_5 \leq Y_6. \quad (11.3)$$

Направление всех линий задаем в направлении роста координаты x (рис. 3). Построение фрактала полностью определено.

Осталось доказать, что возникающее поле направлений в области (2) непрерывно при достаточно быстро растущей функции

продольного деления (3) и неограниченном продолжении процесса построения поколений клеток.

Введем на линиях вида $y=f(x)$ норму

$$\|f\|_V = \max_{x \in V} \{ |f| \}. \quad (12)$$

Достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g' - Y_4'\|_{[a;B]} = 0; \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|q' - Y_5'\|_{[A;b]} = 0; \quad (13.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - Y_4\|_{[a;B]} = 0; \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|q - Y_5\|_{[A;b]} = 0; \quad (13.2)$$

В силу симметрии построения (10)(11) достаточно доказать первые из пределов (13.1) и (13.2).

$$\|g - Y_4\|_{[a;B]} = \max \{ \|g - q\|_{[a;A]}; \|g - p\|_{[A;B]} \}; \quad (14.1)$$

$$\|g' - Y_4'\|_{[a;B]} = \max \{ \|g' - q'\|_{[a;A]}; \|g' - p'\|_{[A;B]} \}; \quad (14.2)$$

$$\|g - q\|_{[a;b]} \leq \|Y_1 - Y_2\|_{[a;b]} / m(n) \quad (15.1)$$

$$\|g' - q'\|_{[a;b]} \leq \|Y_1' - Y_2'\|_{[a;b]} / m(n) \quad (15.2)$$

$$\begin{aligned} \|g - p\|_{[A;B]} &= \|g - zg - (1-z)q\|_{[A;B]} = \|(1-z)(g - q)\|_{[A;B]} \leq \\ &\leq \|(1-z)(Y_1 - Y_2)\|_{[a;b]} / m(n) \leq \|Y_1 - Y_2\|_{[a;b]} / m(n) \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$\begin{aligned} \|g' - p'\|_{[A;B]} &= \|g' - g'z - g'z't' - q'(1-z) + qz't'\|_{[A;B]} \leq \\ &\leq ({}^{3\pi}/_{|a-b|}) \|g - q\|_{[A;B]} + \|g' - q'\|_{[A;B]} \leq \\ &\leq ({}^{3\pi}/_{(b-a) m(n)}) \|Y_1 - Y_2\|_{[A;B]} + \|Y_1' - Y_2'\|_{[A;B]} / m(n) \end{aligned} \quad (15.4)$$

Из неравенств (15) следуют первые пределы (13.1)(13.2) при достаточно быстро растущей функции продольного деления (3). Критерием достаточного роста $m(n)$ является монотонное убывание $\max \|g - q\|_{[a;b]}$ и $\max \|g' - q'\|_{[a;b]}$ по номеру поколения n , где максимум берется по всем клеткам поколения. В силу конечности числа клеток каждого поколения такая функция существует. Для вторых пределов (13.1), (13.2) доказательство аналогично. Непрерывность векторного поля доказана.

На рис. 4 показано частичное построение до третьего поколения. Хорошо видна сходимост векторных полей направлений.

Замечание. Реально, достаточно иметь $m(n) \cong 2$. Но доказательство этого основано на случайном обстоятельстве в конструкции фрактала. Длина отрезка $|a-b|$ по поколениям убывает

как геометрическая прогрессия со знаменателем $(2/3)$. Это следует из выбора точек А, В в (9.1). А число продольных делений исходной клетки для поколения при постоянной функции продольного деления растет как геометрическая прогрессия с целым знаменателем больше единицы. Поэтому линии границ клеток и их производные сближаются, а выражения (15) стремятся к нулю с ростом поколения клеток.

Доказательство. Из (1), (15.2), (15.3) следует

$$\|g-q\| \leq \|f_1-f_2\| / \prod_{i=1, \dots, n} m(i) \quad (16.1)$$

$$\|g-p\| \leq \|f_1-f_2\| / \prod_{i=1, \dots, n} m(i) \quad (16.2)$$

$$\|g'-p'\| \leq \left(\frac{3\pi}{(b-a)} \right) \|f_1-f_2\| / \prod_{i=1, \dots, n} m(i) + \|f'_1-f'_2\| / \prod_{i=1, \dots, n} m(i) \quad (16.3)$$

Условия сходимости (13) для (16.3) означают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3\pi}{(b-a)} \right) / \prod_{i=1, \dots, n} m(i) = 0 \quad (17)$$

По условию построения

$$b-a = 2\pi(2/3)^n \quad (18.1)$$

Предположим

$$m(n) = M = \text{const} \quad (18.2)$$

Тогда

$$\left(\frac{3\pi}{(b-a)} \right) / \prod_{i=1, \dots, n} m(i) = (3/2)^{n+1} / M^n \quad (18.3)$$

Из (18.3) следует, что при $M > 3/2$ выполняется (17). Доказательство завершено.

Каждой точке сопоставлен вектор

$$v(x, y) = (1, u'(x, y)). \quad (19.1)$$

Заметим, что траектории $u(x)$, касательные к векторному полю $v(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ в каждой точке (x, y) , где $v_x \neq 0$, удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{dx} u(x) = v_y(x, y) / v_x(x, y) \quad (19.2)$$

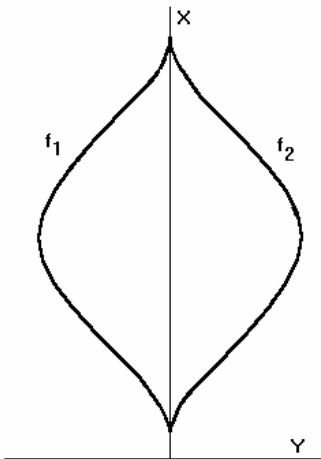


Рис. 1. Начальная клетка и область построения фрактального векторного поля.

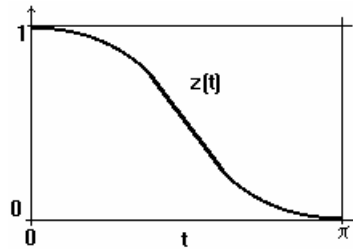


Рис. 2. Функция поперечного деления клеток.

Многомерный случай.

Предположим, что требуется построить всюду бифуркационное матричное поле частных производных $v(x,y)=(v_{i,j})$, $i=1_n$, $j=1_m$, в области евклидового пространства $R^{n+m}=R^n \times R^m$, где n — размерность аргумента $x=(x_1, \dots, x_n)$, m — размерность зависимой переменной $y=(y_1, \dots, y_m)$. Поверхность $y(x)$ касательная к матричному полю, если

$$\partial y_j(x)/\partial x_i = v_{i,j}(x,y) \quad (20.1)$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи

$$\partial v_{i,j}(x)/\partial x_k = \partial v_{k,j}(x)/\partial x_i \quad (20.2)$$

Если матричное поле допускает множество касательных поверхностей F , то скажем, что оно имеет в точке (x,y) , бифуркацию полной размерности, если для любого x -вектора $w=(w_1, \dots, w_n)$ и любого $j \in 1_m$ имеются две траектории $f, g \in F$, такие, что $y=f(x)=g(x)$, $f_j(x+aw) \neq g_j(x+aw)$ при любом достаточно малом $a > 0$.

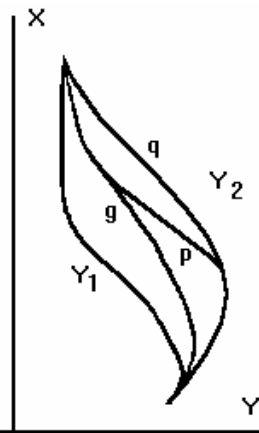


Рис. 3. Продольное (g) и поперечное (p) деление клетки.

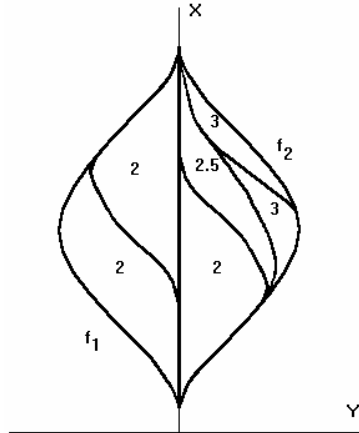


Рис. 4. Часть фрактального построения. Показаны клетка первого поколения, все клетки второго поколения, одна клетка второго полуколения и две клетки третьего поколения. Номера поколений проставлены в клетках. Клетки третьего поколения соответствуют рис. 3. Функция продольного деления клетки тождественно равна 2.

Обозначим Q множество траекторий в построенном выше двумерном векторном поле. Образует множество F траекторий в R^{n+m} по следующему принципу:

$$(f_1, \dots, f_m)(x_1, \dots, x_n) = (q_{1,1}(x_1) + \dots + q_{1,n}(x_n), \dots, q_{m,1}(x_1) + \dots + q_{m,n}(x_n)) = f(x)$$

где

$$q_{i,j}(x_j) \in Q. \quad (21)$$

По построению Q , если $q_1(x) = q_2(x)$, то $q_1'(x) = q_2'(x)$. Поэтому определено матричное поле

$$v_{i,j} = df_j/dx_i = \partial y_j(x) / \partial x_i \quad (22.1)$$

$$\partial v_{i,j}(x) / \partial x_k = \partial v_{k,j}(x) / \partial x_j = 0 \text{ при } k \neq i \quad (22.2)$$

Таким образом, построено матричное поле, имеющее в каждой точке области евклидова пространства бифуркацию полной размерности.

Интерпретация в моделях с бифуркацией аттрактора по параметру.

Традиционно, понятие бифуркации возникло не для траекторий процесса, а для процессов, зависящих от параметра. При этом бифуркационное ветвление относилось к возникновению нескольких новых предельных циклов процесса (аттракторов) вместо одного при малом смещении параметра из критической точки. Расщепление бассейна одного аттрактора на несколько делает невозможным предсказание того цикла, на который перейдет процесс после смещения параметра без точного знания состояния процесса в момент смещения. Таким образом моделируются катастрофы, при которых непредсказуемо меняется устойчивое поведение объекта моделирования. Полученный выше процесс с бифуркацией траекторий в каждой точке области евклидового пространства позволяет построить процесс с бифуркацией аттрактора по параметру в каждой точке евклидовой области изменения параметра. Для простоты построим пример с одномерным параметром. Однако развитый выше аппарат позволяет очевидным образом обобщить пример на любую размерность. Процесс будет протекать в действительном времени $t \in \mathbb{R}$ и принимать двухмерные действительные значения $(z, y) \in \mathbb{R}^2$. Параметр обозначим $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Будет использовано векторное поле $v = (v_x, v_y)$ из (19.1). Процесс определим системой уравнений:

$$\partial y / \partial x = v_y(x, y) / v_x(x, y) \quad (23.1)$$

$$\partial y / \partial t = 0 \quad (23.2)$$

$$dz / dt = y - z \quad (23.3)$$

При каждом значении параметра x координата y фиксирована, а координата z по экспоненте сходится к предельному значению y . Таким образом, аттрактор траектории состоит из одной точки $(y, y) \in \mathbb{R}^2$. При изменении параметра x эта точка претерпевает бифуркацию по уравнению (23.1).

Другой пример всюду плотной бифуркации в области изменения параметра — процесс обмотки тора, хорошо изученный в теории динамических систем. Параметром является тангенс угла наклона траектории относительно образующих окружностей тора. При иррациональном параметре траектория обмотки всюду плотна на торе и аттрактором является весь тор. При рацио-

нальном параметре процесс имеет бесконечно много спиральных аттракторов конечной длины. В трехмерном пространстве $\langle x, y, z \rangle$ можно построить процесс с теми же аттракторами, расположенными на некотором торе.

$$x=r(1+\cos\psi)\cos\varphi \quad (24.1)$$

$$y=r(1+\cos\psi)\sin\varphi \quad (24.2)$$

$$z=r \cdot \sin\psi \quad (24.3)$$

$$d\varphi/dt=u \quad (24.4)$$

$$d\psi/dt=w \quad (24.5)$$

$$dr/dt=1-r \quad (24.6)$$

Параметром процесса является пара (u, w) . При каждом значении параметра процесс из любой точки асимптотически сходится на тор, порожденный окружностью с центром в $(0, 0, 0)$ и радиусом 2 в плоскости $\langle x, y \rangle$, соответствующей углу φ , и окружностью с центром в $(1, 0, 0)$ и радиусом $r=1$ в плоскости $\langle x, z \rangle$, соответствующей углу ψ (см. рис. 5). По начальным данным (x, y, z) начальные значения дополнительных переменных r, φ, ψ определяются по формулам:

$$\operatorname{tg}\varphi=y/x \quad (25.1)$$

$$\operatorname{tg}\psi=2z(x^2+y^2)^{1/2}/(x^2+y^2-z^2) \quad (25.2)$$

$$r=(x^2+y^2+z^2)/2(x^2+y^2)^{1/2} \quad (25.3)$$

При рациональном отношении u/w имеется бесконечно много аттракторов — спиралей конечной длины намотанных на предельный тор. При иррациональном отношении имеется единственный аттрактор, совпадающий со всем тором. Таким образом, при каждом иррациональном отношении параметров процесс имеет странный аттрактор размерности 2, а при рациональном — циклические одномерные спрямляемые аттракторы. Это означает, что в каждой иррациональной точке u/w процесс находится в состоянии катастрофы.

Пример (24)(25) показывает, что процессы, имеющие всюду плотные в области изменения параметра точки катастрофы, могут быть получены и не фрактальным способом.

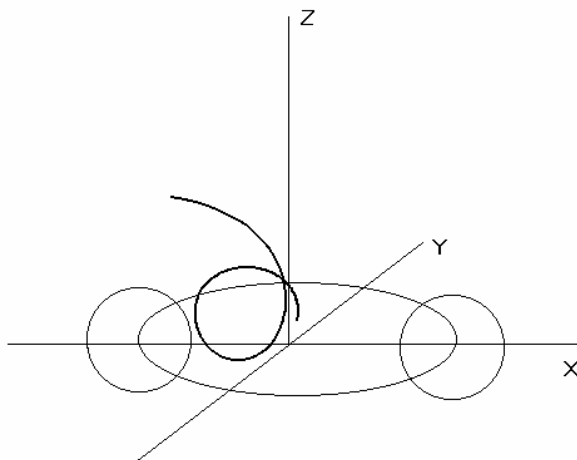


Рис. 5. Траектория процесса обмотки тора.

Литература.

1. И. Пригожин, И. Стенгерс. Порядок из хаоса. М., Прогресс, 1986.
2. Г. Ю. Ризниченко. Лекции по математическим моделям в биологии. М., Ижевск, "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.
3. F. C. Moon. Chaotic & Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists & Engineers. Jon Wiley & Sons, Incorporated, New York, 1992.