

**О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ВЕТРОВОГО
ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОМ ВОДОЕМЕ
(ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)**

Гаврилова Л.В., Компаниец Л.А.

(Красноярск)

Найдено точное решение одной модели ветрового движения однородной жидкости в мелком замкнутом водоеме при предположении стационарности движения и постоянного коэффициента турбулентного обмена. Это решение может быть использовано для проверки работоспособности численных алгоритмов.

**ON EXACT SOLUTION OF A PROBLEM OF WIND FLOW
IN CLOSED RESERVOIR (THREE-DIMENSIONAL CASE)**

Gavrilova L.V., Kompaniets L.A.

(Krasnoyarsk)

An exact solution of wind motion model of a homogeneous fluid in a closed shallow reservoir is obtained when flow is stationary and coefficient of turbulent diffusion is constant. The solution can be used for testing of numerical algorithms.

При решении задачи ветрового движения в реальном водоеме применяются различные математические модели (стационарные и нестационарные, одномерные, двумерные в горизонтальной плоскости, двумерные в вертикальной плоскости, трехмерные). Кроме того, если характеристики течения зависят от глубины, жидкость может быть однородной и неоднородной. Нами была рассмотрена трехмерная модель ветрового движения жидкости в замкнутом водоеме в приближении Буссинеска и предположении гидростатики. Эта модель применялась для расчета ветровых течений жидкости в однородных [1] и стратифицированных по температуре водоемах [2, 3].

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - lv &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial x} dz, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + lu &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial v}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{\rho_0} \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial y} dz, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K_T \frac{\partial T}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $u = u(t, x, y, z)$, $v = v(t, x, y, z)$, $w = w(t, x, y, z)$ – компоненты вектора скорости течения $\nabla = (u, v, w)$; g – ускорение свободного падения; l – параметр Кориолиса; K – коэффициент вертикального турбулентного обмена, $K = K(t, x, y, z)$; ρ – плотность воды в точке с координатами (x, y, z) , $\rho = \rho(T)$, ρ_0 – некоторое среднее значение плотности; $T = T(t, x, y, z)$ – температура; K_T – коэффициент теплопроводности; $\eta = \eta(t, x, y)$ – отклонение поверхности жидкости от равновесного положения. Ось z направлена вертикально вверх.

На боковой цилиндрической поверхности Γ ставятся условия

$$\nabla_n = 0 \tag{2}$$

(проекция скорости на нормаль к боковой поверхности равна 0) и

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0. \tag{3}$$

На водной поверхности (считаем, что граничные условия рассматриваются для $z^0 = 0$)

$$\begin{aligned}
K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{\tau_1}{\rho_0}, \quad K \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\tau_2}{\rho_0}, \\
K_T \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{Q}{C_p \rho_0}, \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= w.
\end{aligned} \tag{4}$$

На дне $z = -H(x, y)$ ставятся условия для горизонтальных скоростей

$$K \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=-H} = k_b u |\nabla|, \quad K \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=-H} = k_b v |\nabla| \quad (5)$$

и вертикальной скорости

$$w = u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (6)$$

Для температуры ставится условие отсутствия теплообмена с дном

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Для возвышения свободной поверхности из граничных условий (4) и (6) получаем следующее уравнение

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

где

$$Q_1 = \int_{-H}^0 u dz, \quad Q_2 = \int_{-H}^0 v dz.$$

Здесь $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ – касательное напряжение ветра на водной поверхности; n – нормаль к боковой поверхности; k_b – коэффициент придонного касательного напряжения; Q – поток тепла, отнесенный к единице поверхности водоема; C_p – удельная теплоемкость воды.

Легко видеть, что в тех областях, где $\partial \rho / \partial x = 0$, $\partial \rho / \partial y = 0$, значения скоростей находятся по тем же формулам, что и в случае однородной жидкости. Поэтому представляет интерес нахождение точного решения системы уравнений (1) с граничными условиями (2) – (7) для однородной жидкости.

Сделаем ряд упрощающих предположений.

Предположение 1. Жидкость является однородной.

Предположение 2. Движение жидкости является стационарным.

Тогда система уравнений (1) и уравнение (8) перепишутся в

виде

$$-lv + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (9)$$

$$lu + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (10)$$

$$\int_{-H}^0 (u_x + v_y) dz = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Система уравнений (9) – (12) дополнена соответствующими граничными условиями. Анализ уравнений (9) – (12) показывает, что уравнения (9) – (11) можно рассматривать независимо от уравнения (12). Далее будем рассматривать систему уравнений и граничные условия только для горизонтальных составляющих вектора скорости u и v .

Сделаем еще ряд предположений.

Предположение 3. Влиянием сил Кориолиса можно пренебречь (это можно сделать, если водоем мелкий [5]).

Предположение 4. На дне для u и v ставятся условия скольжения без трения ($k_b = 0$).

Предположение 5. Коэффициент турбулентного обмена является постоянным ($K = const$).

Предположение 6. Дно ровное ($H = const$).

В результате получим систему уравнений

$$g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (13)$$

$$g \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (14)$$

$$\int_{-H}^0 (u_x + v_y) dz = 0, \quad (15)$$

дополненную следующими граничными условиями

$$\bar{u}_n|_{\Gamma} = 0, \quad (16)$$

$$K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta_1(x, y), \quad \beta_1(x, y) = \frac{\tau_1(x, y)}{\rho_0}, \quad (17)$$

$$K \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta_2(x, y), \quad \beta_2(x, y) = \frac{\tau_2(x, y)}{\rho_0}, \quad (18)$$

$$K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0, \quad (19)$$

$$K \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0, \quad (20)$$

где $\bar{u} = (u, v)$.

В этом случае соотношения

$$u = \frac{\beta_1(x, y)}{K} \left(\frac{z^2}{2H} + z + \frac{H}{3} \right),$$

$$v = \frac{\beta_2(x, y)}{K} \left(\frac{z^2}{2H} + z + \frac{H}{3} \right)$$

удовлетворяют уравнениям (13) – (15) и граничным условиям (17) – (20). Удовлетворить граничному условию (16) можно за счет специального выбора функций $\beta_1(x, y)$, $\beta_2(x, y)$. Например, если Γ – боковая поверхность вертикального цилиндра, то $\bar{u}_n|_{\Gamma} = 0$, если $\beta_1(x, y) = -x$, $\beta_2(x, y) = y$

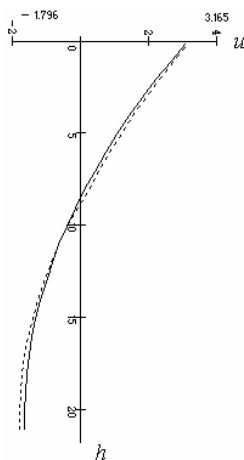


Рис. 1. Распределение скорости по глубине

Отметим, что в работе [5] для системы уравнений (9) – (12) было получено точное решение без учета граничных условий на вертикальных стенках. В работе [4] точное решение получено для случая, когда в системе уравнений (9) – (12) оставлены только члены, описывающие силы Кориолиса и турбулентные движения в вертикальном направлении, граничные условия на вертикальных стенках не учитывались.

Было проведено сравнение численного решения для системы уравнений (1) в случае однородной жидкости с точным. Рассматривалась модельная задача движения жидкости в круговом цилиндрическом бассейне с ровным дном под действием ветра, на поверхности вращающем жидкость вокруг оси цилиндра.

На рисунке 1 представлены точное (сплошная линия) и разностное (пунктирная линия) решения для бассейна радиуса 450 м и глубины 10 м в точке, обозначенной на рисунках 2 и 3 темным кружком. В формуле (18) $\beta_1(x, y) = -x \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}^2$, $\beta_2(x, y) = y \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}^2$, коэффициент турбулентного обмена $K = 10^{-6}$, $\text{м}^2/\text{с}$. Разностное решение соответствует времени, когда движение жидкости становится практически стационарным.

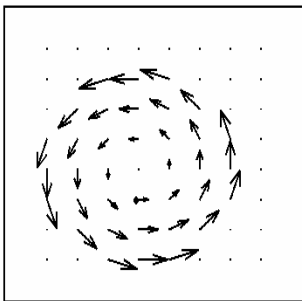


Рис. 2. Векторное поле течений на поверхности водоема $z=0$, точное решение.

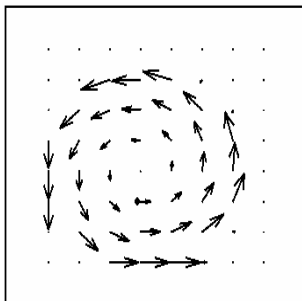


Рис. 3. Векторное поле течений на поверхности водоема $z=0$, численное решение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ и CRDF, грант № REC-002.

Литература.

1. Волкова Г.Б., Квон В.И., Филатова Т.Н. Численное моделирование ветровых течений в Чудском озере. Водные ресурсы, №3, 1981 г., стр. 91 – 99.
2. Квон В.И. Гидротермический расчет водоемов-охладителей. Известия АН СССР, Энергетика и транспорт, 1979, № 5, стр. 129 – 137.
3. Квон В.И. Численное моделирование трехмерных стратифицированных течений в водоемах при больших тепловых нагрузках. Сибирское отделение АН СССР, Институт гидродинамики, Вычислительные методы прикладной гидродинамики, выпуск 84, 1988, стр. 62 – 75.
4. Кочергин В.П. Теория и методы расчета океанических течений. – М.: Наука, 1978.
5. Филатов Н.Н. Динамика озер. – Л.: Гидрометеоздат, 1983.