НОВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Шатров А.В.

(Киров)

В работе предлагается новая асимптотическая методика расчета устойчивости ламинарного течения при обтекании вращающегося канала вязкой жидкостью в области начального участка. В основу методики положено соединение асимптотик с помощью Паде-аппроксимант

NEW USING OF ASYMPTOTICAL METHODS FOR HYDRODYNAMICAL STABILITY PROBLEMS

Shatrov A.V.

Kirov

(This article deals with two points Pade-approximants (TPPAs) and their applications to hydrodynamical stability problems. The TPPA method presented in this work can be applied to calculation the oscillatory boundary layer growth over the top and battom plates of rotating channel)

В подавляющем большинстве исследований [1-8] по теории вращающейся жидкости рассматриваются задачи с осевой симметрией, чем достигается существенное упрощение по сравнению с общим случаем трехмерных течений. Подобного рода упрощение возможно и при анализе отдельных областей потока во вращающихся каналах, образованных прямолинейными поверхностями, при условии, что участки каналов с одинаковой формой постоянного сечения достаточно протяженны. Основанием для упрощения в этом случае служит отличительное свойство развитого слоя Экмана сохранять свои характеристики неизменными вниз по потоку, если краевые условия постоянны.

Было установлено, что при определенных условиях на входном участке возникают пространственные колебания [5-8]. При этом отмечается [5], что пространственные изменения картины течения схожи с теми колебаниями, которые даются двухмерной нестационарной постановкой. По-видимому, здесь можно провести аналогично с хорошо изученными волновыми задачами, описывающимися нелинейными параболическими уравнениями [9-12]. В нашем случае роль времени играет продольная координата, деленная на среднерасходную скорость, а роль производной по времени в уравнениях типа Колмогорова-Петровского-Пискунова [9-11] отводится конвективной производной в параболизованной стационарной задаче.

В данной работе излагаются общая постановка и асимптотический анализ задач развития (эволюции) течения во вращающейся системе вблизи поверхности пластины, обтекаемой однородным потоком.

Ранее задача была решена приближенным методом интегральных соотношений [13], и качественно описан переход от пограничного слоя Блазиуса к слою Экмана в форме пространственных колебаний. Численное решение [3,4] подтверждает наличие колебательного характера развития слоя Экмана. Количественные результаты при этом существенно отличаются от [13].

1. Постановка задачи. Пусть линии тока внешнего однородного течения в системе координат $Oxyz$ прямолинейны и направлены параллельно оси Oz. Кроме того, предположим, что распределение скорости в пограничном слое неизменно в направлении оси Ox.

Такое течение реализуется, например, при обтекании пластины, расположенной вблизи входа в быстровращающийся щелевой канал на достаточном удалении от боковых (коротких) стенок канала. Введем обозначения: u, v, w – проекции относительно скорости на оси координат Ox, Oy, Oz;

ν – коэффициент кинематической вязкости;

$P^* = P - \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(x^2 + y^2\right)$ - модифицированное давление;

ρ - плотность;

P – давление;
W_0 – скорость потока на входе в канал.

Уравнение неразрывности и движения в приближении пограничного слоя имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$w\frac{\partial w}{\partial z} + v\frac{\partial w}{\partial z} = 2\omega u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2}$$

$$w\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -2\omega w - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{3}$$

Наличие боковых стенок канала обеспечивает создание постоянного градиента давления в направлении оси Ox, уравновешивающего во внешнем течении действие силы Кориолиса. С учетом принятых предположений для внешнего течения уравнения (2) и (3) примут вид

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x} = 2\omega W_0 \tag{5}$$

Используя (4) и (5), уравнения (2) и (3) запишем в виде

$$w\frac{\partial w}{\partial z} + v\frac{\partial w}{\partial y} = 2\omega u + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{6}$$

$$w\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega(W_0 - w) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{7}$$

В качестве краевых условий к уравнениям (6) и (7) примем обычные условия прилипания на поверхности пластины и условия асимптотического выхода на значения составляющих скорости во внешнем течении.

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \tag{8}$$

$$y \to \infty: \quad u \to 0, \quad w \to W_0 \tag{9}$$

Начальные условия запишем в виде

$$z = z_0: \quad w = w_0(y), \quad u = u_0(y) \tag{10}$$

z_0 – начальное сечение пограничного слоя.

Таким образом, (6) – (10) определяют начально краевую задачу параболического типа.

В качестве масштаба толщины пограничного слоя выберем величину

$$\delta_0 = \int_0^\infty \frac{w}{W_0}\left(1 - \frac{w}{W_0}\right)^2 dy \tag{11}$$

Запишем конвективную производную от выражения $(W_0 - w)^2$, преобразуем ее с учетом (1) и (6) и, представив левую часть в дивергентном виде, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[w(W_0 - w)^2\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v(W_0 - w)^2\right] = -4\omega u(W_0 - w) - 2\nu(W_0 - w)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{12}$$

Проинтегрируем (12) по y от 0 до ∞, в результате получим интегральное соотношение, определяющее изменение масштаба (11) вдоль пограничного слоя

$$\frac{d}{dz}\left(\delta_0 W_0^3\right) = -4\omega\int_0^\infty u(W_0 - w)dy - 2\nu\int_0^\infty \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy + 2\nu W_0 \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} \tag{13}$$

Введем функцию тока ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = w, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = -v$$

и безразмерные величины

$$\zeta = \frac{z\omega}{W_0}, \quad \eta = \frac{y}{\delta_0(z)}, \quad \varphi(\zeta,\eta) = \frac{w}{W_0},$$

$$\kappa(\zeta,\eta) = \frac{u}{W_0}, \quad \Phi(\zeta,\eta) = \frac{\psi}{W_0\delta_0} = \int_0^\eta \varphi d\eta$$

Уравнения (6), (7), (13) краевые (8), (9) и начальные условия (10) запишем в безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{F \cdot \Phi}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + 2 f \chi = f \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \frac{F \cdot \Phi}{2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \eta} + 2 f (1 - \varphi) = f \left(\varphi \frac{\partial \chi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right) \tag{15}$$

$$f = \frac{\delta_0^2 \omega}{\nu},$$

$$\frac{df}{d\zeta} = F = -8 f \int_0^\infty \chi (1 - \varphi) d\eta - 4 \int_0^\infty \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 d\eta + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_0 \tag{16}$$

$$\eta = 0: \quad \varphi = \Phi = 0, \quad \chi = 0 \tag{17}$$

$$\eta \to \infty: \quad \varphi \to 1, \quad \chi \to 0 \tag{18}$$

$$\zeta = \zeta_0: \quad \varphi = \varphi_0(\eta), \quad \chi = \mathrm{X}_0(\eta), \quad f_0 = f(\zeta_0) \tag{19}$$

2. Асимптотический анализ течения. Отличительной особенностью развивающегося пограничного слоя пластины во вращающейся системе координат является перестройка течения от слоя Блазиуса к слою Экмана. Процесс перестройки происходит в направлении основного течения по координате Oz.

2.1. Асимптотика по продольно-ориентированной координате. (Горизонтальный переходный слой). Структура уравнений пограничного слоя (14) – (16) такова, что правые части можно рассматривать как обобщенную производную искомых функций по параболической переменной, придавая ей смысл эволюционной переменной. Тогда величину f можно определить как некий параметр, определяющий эволюцию течения.

В указанном смысле уравнения становятся весьма близки к известным нелинейным уравнениям параболического типа

$$u_t = u_{xx} + f(u),$$

впервые описанным в [11]. Теория таких уравнений хорошо описана и предсказывает появление волновых решений типа бегущей волны, а также сосредоточенных волн типа кинка и солитона.

Обратим еще раз внимание на переменную f. Очевидно, что значение этой переменной напрямую связано и с существованием пограничного слоя и с характером его изменения по продольной координате. Так как развитие слоя происходит в направлении координаты ξ, то нам кажется обоснованным введение понятия «горизонтального переходного слоя», при этом f является порядковой переменной в этом переходном слое. Так, при $\xi \to \infty$ $\dfrac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} = 0$, $f \to \text{const}$ и, следовательно,

$$\frac{df}{d\xi} \to 0 \quad \text{или} \quad F \to 0.$$

Вследствие этого уравнения (14), (15) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + 2 f \chi = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + 2 f (1 - \varphi) = 0 \tag{21}$$

и имеют аналитическое решение

$$\begin{cases} \varphi = 1 - \exp(-\tilde{\eta}) \cos \tilde{\eta} \\ \chi = \exp(-\tilde{\eta}) \sin \tilde{\eta}, \end{cases} \tag{22}$$

где $\tilde{\eta} = \eta \dfrac{\delta_0}{\lambda}$, $\lambda = \sqrt{\dfrac{\nu}{\omega}}$ - масштаб слоя Экмана.

Решение (22) хорошо известное решение Экмана [1]. Отталкиваясь от терминологии данного раздела, назовем его внешней асимптотикой горизонтального переходного слоя, или асимптотикой установившегося (развитого) слоя Экмана.

Перейдем к описанию внутренней асимптотики горизонтального переходного слоя. Отдавая отчет в непригодности уравнений (14), (15) в непосредственной близости к передней кромке пластины, рассмотрим, однако, область $\xi \to \infty$, где, очевидно, и $\delta(\xi) \to 0$. Так как последнее условие влечет за собой $f \to 0$, то в силу асимптотического равенства $f \sim o$ уравнения (14) и (15) с граничными условиями (17), (18) дают обычное решение Блазиуса для невращающейся пластинки (для профиля $\varphi(\eta)$ и, соответственно $\chi(\eta) = 0$). Таким образом мы зададим внутреннюю асимптотику горизонтального переходного слоя.

2.2. Асимптотика пограничного слоя (вертикальный переходный слой). Вертикальный переходный слой определим обычным образом по поперечной координате η как пограничный слой вязкой жидкости в классическом смысле.

Асимптотику вертикального переходного слоя будем рассматривать, начиная с решения Блазиуса, получающегося при $f = 0$. Уравнения в этом случае имеют вид

$$\varphi'' + \frac{\Phi}{2}\varphi' = 0 \tag{23}$$

$$\chi'' + \frac{\Phi}{2}\chi' = 0 \tag{24}$$

$$\Phi = \int_0^\eta \varphi d\eta \tag{25}$$

граничные условия сохраняют вид (17), (18). Система уравнений (23) – (25) формально совпадает с задачей о теплообмене в неизотермическом пограничном слое пластины при числе Прандтля, равном 1. При однородных условиях она описывает случай теплоизолированной пластины и соответственно определяет нулевое решение для χ (η), что, в свою очередь, соответствует нашему предположению о начальном профиле течения (19).

Внутреннюю асимптотику для скорости φ будем искать в виде (с учетом (17))

$$\begin{aligned}
\Phi &= a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4 + a_5\eta^5 + O(\eta^6) \\
\varphi &= 2a_2\eta + 3a_3\eta^2 + 4a_4\eta^3 + 5a_5\eta^4 + O(\eta^5) \\
\varphi' &= 2a_2 + 6a_3\eta + 12a_4\eta^2 + 20a_5\eta^3 + O(\eta^4) \\
\varphi'' &= 6a_3 + 24a_4\eta + 60a_3\eta^2 + O(\eta^3)
\end{aligned} \tag{26}$$

и после подстановки ф.а.р. (26) в уравнение (23)

$$6a_3 + 24a_4\eta + 60a_5\eta^2 + \frac{1}{2}\left(a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4 + a_5\eta^5\right)\cdot\left(2a_2 + 6a_3\eta + 12a_4\eta^2 + 20a_5\eta^3\right) = 0$$

получим $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = -\dfrac{a_2^2}{60}$ и, соответственно внутренняя асимптотика запишется как

$$\begin{aligned}\varphi &\sim 2a_2\eta - \frac{a_2^2}{12}\eta^4 \\ \Phi &\sim 2a_2\eta^2 - \frac{a_2^2}{60}\eta^5\end{aligned} \tag{27}$$

Внешняя асимптотика имеет вид

$$\varphi \sim 1 - \frac{A}{2\eta - c}\exp\left(-\eta^2 + c\eta\right) \tag{28}$$

где

$$c = \int_0^\infty (1-\varphi)d\eta \tag{29}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi(1-\varphi)d\eta \tag{30}$$

Выражение для A получим, умножив уравнение (23) на $\exp\left(\eta^2 - c\eta\right)$, затем, интегрируя его от 0 до ∞,

$$A = 2a_2 - \int_0^\infty \left(\frac{\Phi}{2} - 2\eta + c\right)\varphi' \exp\left(\eta^2 - c\eta\right)d\eta \tag{31}$$

Асимптотику для нетривиальных значений составляющей скорости χ будем строить по аналогии с температурными асимптотиками.

Подставляя ф.а.р. для внутренней области G^i $\chi = \chi_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3 + b_4\eta^4 + O\left(\eta^5\right)$ в (24) получим выражения для коэффициентов

$$b_2 = 0,\quad b_3 = 0,\quad b_4 = -\frac{1}{24}a_2\chi_1 .$$

Таким образом, внутренняя асимптотика имеет вид

$$\chi \sim \chi_1\eta - \frac{1}{24}a_2\chi_1 \tag{32}$$

Внешняя асимптотика

$$\chi \sim \frac{B}{2\eta - c}\exp\left(-\eta^2 + c\eta\right)$$
$$\chi' \sim -B\exp\left(-\eta^2 + c\eta\right) \qquad (33)$$

Для определения B проинтегрируем уравнение (24) от) до ∞, умножив его на $\exp\left(\eta^2 - c\eta\right)$, получим

$$B = -\chi_1 + \int_0^\infty \left(\frac{\Phi}{2} - 2\eta + c\right)\chi' \exp\left(\eta^2 - c\eta\right)d\eta \qquad (34)$$

2.3. Паде-интерполяция Паде-аппроксиманты для составляющих скорости будем строить, опираясь на асимптотики, которые, вообще говоря, определены в соответствующих областях G^i и G^e для произвольных значений ξ, при этом определяющие параметры a_2, e, A, B, χ также будут зависеть от переменной ξ и пересчитываются для каждого значения этой переменной. Подробнее алгоритм описывается ниже.

Итак, интерполяцию составляющей скорости в основном направлении течения запишем в виде

$$\varphi_a = 1 - \frac{\left(1 + A\eta^3\right)\exp\left(-\eta^2 + c\eta\right)}{1 + \alpha + \eta + \alpha_2\eta^2 + \alpha_4\eta^4} \qquad (35)$$

Локальное равенство в области G^i с учетом разложения экспоненты

$$\left(2a_2\eta - \frac{a_2^2}{12}\eta^4\right)\left(1 + \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2 + \alpha_4\eta^4\right) = 1 + \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2 + \alpha_4\eta^4 -$$
$$-\left(1 + A\eta^3\right)\left(1 - \eta^2 + c\eta + \frac{\left(\eta^2 - c\eta\right)^2}{2}\ldots\right)$$

дает следующее значение коэффициентов:

$$\alpha_1 = c + 2a_2$$
$$\alpha_2 = 2a_2\left(2a_2 + c\right) - 1 + \frac{c^2}{2}.$$

Локальное равенство в области G^e дает условие для определения α_4

$$\left(1 + A\eta^3\right)\left(2\eta - c\right) = A\left(1 + \alpha_1\eta + \alpha_2\eta^2 + \alpha_4\eta^4\right) \Rightarrow \alpha_4 = 2.$$

Таким образом, Паде-аппроксиманта для составляющей скорости φ имеет вид

$$\varphi_a = 1 - \frac{\left(1 + A\eta^3\right)\exp\left(-\eta^2 + c\eta\right)}{1 + \left(2a_2 + c\right)\eta + \left(2a_2\left(2a_2 + c\right) - 1 + \dfrac{c^2}{2}\right)\eta^2 + 4\eta^4} \tag{36}$$

Интерполяцию для второй составляющей скорости будем конструировать, опираясь на асимптотики (32), (33) по аналогии с температурной аппроксимацией. Основанием этого является формальное совпадение системы уравнений (23) – (25) с уравнениями неизотермического пограничного слоя, а также априорный факт существования экстремума функции $\chi(\eta)$ в точке η_m.

$$\chi'_a = \frac{\eta_m - \eta}{\beta_0 + \beta_1\eta}\exp\left(-\eta^2 + c\eta\right) \tag{37}$$

Из локального равенства в области G^i с учетом разложения экспоненты следует

$$\beta_0 = \frac{\eta_m}{\chi_1}, \quad \beta_1 = \frac{c\eta_m - 1}{\chi_1}.$$

Для определения точки экстремума η_m при условии $\chi'\left(\eta_m\right) = 0$ воспользуемся уравнением, вытекающим из (15)

$$\chi_{\eta\eta}\left(\eta_m\right) = f\left[\varphi\left(\eta_m\right)\left(2 - \chi_\xi\left(\eta_m\right)\right) - 2\right] \tag{38}$$

Граничные условия удовлетворяются, если положить

$$\Phi_a\left(\eta\right) = \int_0^\eta \varphi_a d\eta \tag{39}$$

$$\chi_a\left(\eta\right) = \int_0^\eta \chi'_a d\eta \tag{40}$$

Переходя к пределу $\eta \to \infty$ в равенстве (6.40), получим условие для нормировки

$$\int_0^\infty \chi'_a d\eta = 0 \tag{41}$$

Паде-аппроксиманты (36) и (37) окончательно определяются после решения нелинейной системы (29), (30), (31), (38), (41)

2.4. Алгоритм решения. Для расчета характеристик течения развивающегося слоя воспользуемся дифференциально-разностным представлением уравнений (14), (15).

Процедура решения системы уравнений (42) – (46) состоит в следующем:

1). принимая в качестве нулевого шага $\varphi^{(0)}$, $\chi^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$ аппроксиманты, полученные для решения Блазиуса, находим их производные $\dfrac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\eta}$, $\dfrac{\partial\chi^{(0)}}{\partial\eta}$, $\dfrac{\partial^2\varphi^{(0)}}{\partial\eta^2}$, $\dfrac{\partial^2\chi^{(0)}}{\partial\eta^2}$;

2). находим значения $f^{(1)}$, $F^{(0)}$ по (45), (46), задавая шаг $\Delta\xi$;

3). решая систему (42) – (44), находим $\varphi^{(1)}$, $\chi^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$;

4). строим Паде-интерполяции полученных решений $\varphi_a^{(1)}$, $\chi_a^{(1)}$, находим их производные и далее, повторяя пункты 1.-3., переходим к следующему шагу.

Для реализации процедуры решения использовался пакет «Математика» программной оболочки Maple-6.1, позволяющий производить аналитические преобразования, обращение к которому возможно из исходного модуля FORTRAN-программы.

Процесс колебаний удобнее всего отслеживать по изменению величин

$$\delta^* = \frac{\delta}{\lambda} = \int_0^\infty (1-\varphi_a)\,d\tilde{\eta}\,,\; q^* = \frac{q}{\lambda} = \int_0^\infty \chi_a\,d\tilde{\eta},\; \overline{\eta} = \eta\frac{\delta_0}{\lambda}\,,$$

где $\lambda = \sqrt{\dfrac{\nu}{a}}$ - масштаб установившегося слоя Экмана. Величины δ^* и q^* характеризуют соответственно толщину вытеснения основного течения и расход, переносимый вторичным течением. Асимптотические (при $\xi \to \infty$) значения для δ^* и q^* получаются из решения (22) после интегрирования.

При изменении ξ ($0 < \xi \le 20$) зависимость величин δ^* и q^* от ξ приобретает характер пространственных затухающих колебаний вокруг асимптотических значений (42) и (43). Отклонения этих величин от асимптотических значений, начиная с $\xi = 20$, составляют менее 1%.

Поперечное течение, развивающееся вследствие нарушения баланса силы Кориолиса и градиента давления в направлении оси Ox, которое обусловлено торможением потока вблизи стенки, оказывает через появление проекции кориолисовой силы на ось Oz обратное воздействие на профиль основного потока. В свою очередь, изменение профиля скорости основного потока отражается на развитии поперечного течения. Таким образом, процесс развития течения в переходном слое имеет колебательный характер.

Уменьшение компоненты силы Кориолиса $|-2\omega u|$ сопровождается снижением интенсивности воздействия поперечного течения на основной поток, что вновь приводит к менее заполненному профилю φ. Колебания совершаются вокруг асимптотического решения (22), полученного для установившегося слоя Экмана.

3. Устойчивость развивающегося пограничного слоя Экмана. С точки зрения теоретической, так и практической важно исследовать влияние возмущения на начальные условия – проследить эволюцию этих возмущений, прояснив в какой-то мере устойчивость развивающегося слоя по классической схеме релаксации внесенных в поток возмущений.

Будем задавать в сечении $\xi = \xi_0$ начальные условия $f = f_0$, $\varphi = \varphi_0(\eta)$, $\chi = \chi_0(\eta)$, а разности $\varphi_*(\eta) - \varphi_0(\eta)$ и $\chi_*(\eta) - \chi_0(\eta)$ представляют возмущения поля скоростей относительно распределений φ_*, χ_*, соответствующих слою Экмана ($\eta \to \infty$). Для получения распределений $\varphi_0(\eta)$ и $\chi_0(\eta)$ использовалась следующая процедура: отталкиваясь от профилей, полученных при решении уравнений типа Фокнера-Скэн, мы решали систему уравнений (42) – (46) от значений $f = 0$ до значения $f_0 \cong f_\infty$. При этом значение f_∞ при $\xi \to \infty$ в соответствии с (16) и (22) равно 0,1083. Соответствующие значениям f_0 профили $\varphi(\eta)$ и $\chi(\eta)$ принимались в качестве начальных для исследования процесса релаксации. Для последующего решения полагалось $\xi_0 = 0$, $f = f_0$.

Слабовозмущенным полем скоростей будем полагать возмущения, соответствующие значениям $f_0 = 0{,}1050$; $0{,}1100$ Изменение характеристик течения в процессе релаксации внешних возмущений имеет характер быстрозатухающих пространственных колебаний. Длина релаксаций мала, и уже после одного периода колебаний слой приближается к установившемуся соотношению.

Для получения больших возмущений (соответствующих f_0 = 0,1290, 0,1390) использовались начальные профили $\varphi_0(\eta)$, $\chi_0(\eta)$ из набора «диффузорных» профилей (β= -0,1, -0,15).

При f_0 = 0,1290 наблюдается значительный рост амплитуды колебаний интегральных характеристик $\frac{\delta *}{\lambda}$, $\frac{q}{\lambda}$, $\frac{\delta **}{\lambda}$, $\frac{\delta_0}{\lambda}$ При этом установление характеристик происходит медленнее, и процесс релаксации внесенных возмущений затягивается по сравнению с ранее рассмотренными случаями.

Наибольшему отклонению начального f_0 = 0,1390 от f_∞ соответствуют наибольшие возмущения поля скорости. В заключение отметим, что возмущения, при которых начальный профиль $\varphi_0(\eta)$ имеет знакопостоянную производную $(\varphi_0''(\eta) < 0)$, относительно быстро релаксируют. Возмущения, при которых $\varphi_0(\eta)$ имеет знакопеременную вторую производную ($\varphi'' > 0$ при η = η_s и $\varphi'' < 0$ при $\eta > \eta_s$, η_s – точка перегиба), вызывают значительные колебания всех характеристик течения, а процесс установления при $f_0 > 0{,}1390$ становится неустойчивым.

Работа выполнена при поддержке гранта МО Е-00-4.0-125.

Литература.

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л., 1975, 304 с.
2. Ludwig H. Die ausgebildete Kanalströmungen in einem rotierenden System // Ing. Arch., 1951, b.19, s. 296-308.
3. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. – Новосибирск: 1981, с. 190-235.
4. Смирнов Е.М. Динамика вязкой жидкости во вращающихся каналах: Дисс. на соиск. уч ст. докт. физ.-мат. Наук, ЛПИ, Л., 1987, 351 с.
5. Смирнов Е.М. Двумерные и трехмерные задачи динамики вязкой жидкости и теплообмена во вращающихся каналах // Проблемы механики жидкости и газа. Спб: Изд-во СПбГТУ, 2000, с. 180-205.
6. Шатров А.В. Численное моделирование ламинарных, переходных и турбулентных пристенных течений типа слоя Экмана: Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук, ЛПИ, Л., 1983, 170с.
7. Овчинников О.Н., Смирнов Е.М. Динамика потока и теплообмен во вращающемся щелеобразном канале // ИФЖ, 1978,

т.35, № 1, с. 87-92.
8. Смирнов Е.М., Шатров А.В. Развитие пограничного слоя на пластине во вращающейся системе. // Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, 1982, с. 154-157.
9. Молотков И.А., Вакуленко С.А. Сосредоточенные нелинейные волны. – Л.: Изд. ЛГУ, 1988, 240с.
10. Колмогоров А.Н., Петровский Г.И., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. Моск. ун-та, 1937, т.1, № 6.
11. Шатров А.В. Об устойчивости волновых решений одной параболической задачи // Ежегодн. научн.-техн. конф. ВятГТУ, Тезисы докл., ч. II. – Киров, 2000, с.26-27.
12. Шатров А.В. Связь уравнений развивающегося слоя Экмана с эталонным уравнением Колмогорова-Петровского-Пискунова // Ежегодн. научн.-техн. конф. ВятГТУ, Тезисы докл., ч. II. – Киров, 2000, с.31-32.
13. Kurosaka M. The oscillatory boundary layer growth over the top and battom plates J. Trans of. ASME, Ser D, 1973, v. 95, No 1, p. 139-146.