ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ – СРЕДСТВА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОСИСТЕМ

Яковенко Г.Н. .

(г. Долгопрудный)

Аннотация. Рассматривается модификация систем Лотки_Вольтерра. Модификация дает возможность учитывать природные непредсказуемые влияния на экосистему. Изучены также алгебраические модели, позволяющие задавать динамику системы с точностью до описания переменных состояния.

GROUPS AND ALGEBRAS LIE - TOOLS FOR MODELLING ECOSYSTEMS

Yakovenko G.N.

(Dolgoprudny)

The modification of system Lotka – Volterra considered. The modification enables to take into account natural unpredictable influences on ecosystem. The algebraic models, allowing to describe are investigated also dynamics of system to within the description of a variable state.

1. Введение

Обсуждаются математические модели экологических систем. Модели строятся на основе обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. В настоящей работе в традиционные модели вносятся два уточнения. Во-первых, в модели учитывается неопределенность, которую свойственно вносить природе в взаимодействие экологических субъектов: перепады температуры и давления, дуновения ветра, сезонные изменения и т. д. Эта неопределенность учтена вхождением в уравнения достаточно произвольных функций $u_k(t)$ времени *t*.

Во-вторых, устраняется субъективизм, который вносит в модель конкретный выбор переменных состояния, и следующие из этого выбора рассуждения о линейности – нелинейности. На основе групп и алгебр Ли строятся модели, инвариантные к выбору переменных состояния, т.е. модель не изменяется при любой, в том числе и нелинейной, неособенной замене переменных.

Изложение начинается с минимальных сведений о групповых системах и инвариантных моделях.

2. Групповые системы

Определение 2.1 [2]. *Система*

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^{r} \varphi_{kl}(x) u_l(t), \qquad k = \overline{1,n}, \qquad u \in U \subset R^r \tag{2:1}$$

называется групповой, если для функций $\varphi_{kl}(x)$ *выполнены условия*

$$rank \left\| \varphi_{kl}(x) \right\| = \min\{n, r\} \tag{2.2}$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{r} c_i \varphi_{kl}(x) = 0, c_l = const \right\} \Rightarrow \left\{ c_l = 0, l = \overline{1,n} \right\} \tag{2.3}$$

$$\left[X_i, X_j \right] = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}^k X_k \text{ , } C_{ij}^k = const \text{ , } i, j, k = \overline{1,r} \tag{2.4}$$

где обозначено

$$X_l = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kl}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \text{ , } l = \overline{1,r} \text{ ,} \tag{2.5}$$

$\left[X_i, X_j \right]$ *– коммутатор операторов* (2.5):

$$\left[X_i, X_j \right] = \sum_{k=1}^{n} \left\{ X_i \varphi_{kj}(x) - X_j \varphi_{kj}(x) \right\} \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{2.6}$$

Равенство (2.4) показывает, что множество операторов $\sum_{k=1}^{r} u_k X_k$, $u_k = const$ есть алгебра Ли с базисом X_k и структурными постоянными C_{ij}^k [3].

Термин *групповая система* оправдан тем, что каждой системе (2.1) ставится в соответствие r – параметрическая группа

$$x_k = g_k(x_{10},...,x_{n0}, v_1,...,v_r), \qquad (2,7)$$

уравнения которой вычисляются по (2.1) при $u_l(t)$ = const [3]. Группе (2.7) соответствует алгебра Ли с базисом (2.5) и структурными постоянными C_{ij}^k, определенными в (2.4).

Следующая теорема наводит связь между функционированием системы (2.1) и группой (2.7).

Теорема 2.1 [4]. *Сопоставим паре $\{u(t), t\}$ преобразование пространства R^n – сдвиги вдоль решений x(t) групповой системы (2.1), в которую подставлены функции u(t): из точек x(0) = x_0 в точки x(t). Преобразование $x_0 \leftrightarrow x(t)$ принадлежит группе (2.7), т. е. каждой паре $\{u(t), t\}$ соответствует такой набор параметров $v_1,...,v_r$, что преобразование (2.7) и преобразование $x_0 \leftrightarrow x(t)$ совпадают.*

Для построения инвариантной к выбору переменных *x* модели требуется погрузить групповую систему в класс *L* – систем.

Определение 2.2. *L – система*

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^{r} \varphi_{kl}(x) u_l(t),\ k = \overline{1,n},\ u \in U \subset R^r \qquad (2,8)$$

это групповая система при r = n .

Каждой групповой системе (2.1) при $r \neq n$ можно поставить в соответствие *L* – систему (2.8). Далее потребуется случай $r > n$.

Теорема 2.2 [4]. *Пусть для групповой системы (2.1) выполняется r > n . Тогда добавлением к (2.1) уравнений*

$$\dot{x}_{n+i} = \sum_{i=1}^{r} \varphi_{n+il}(x) u_l(t),\ i = \overline{1, r-n} \qquad (2.9)$$

можно добиться того, что расширенная система (2.1), (2.9) – L - система (2.8) с теми же структурными постоянными C_{ij}^k, что и в (2.4).

Добавленные уравнения (2.9) строятся по вполне определенному алгоритму [4].

3. Модель, инвариантная к выбору переменных состояния

Принадлежность к L – системам инвариантна по отношению к неособенному преобразованию $\tilde{x} = h(x)$ переменных состояния. В переменных $\tilde{x}$ система (2.8) имеет такую же структуру

$$\dot{\tilde{x}}_k = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\varphi}_{kl}(\tilde{x}) u_l(t),\ k = \overline{1, n},\ u \in U \subset R^r \qquad (3,1)$$

Функции $\tilde{\varphi}_{kl}(\tilde{x})$ удовлетворяют условиям (2.2) – (2.4), причем с теми же постоянными C_{ij}^k в (2.4), что в переменных x. Если системы (2.8), (3.1), связанные неособенным преобразованием $x \leftrightarrow \tilde{x}$, считать эквивалентными, то каждому классу эквивалентности соответствуют размерность n пространства состояний x, постоянные C_{ij}^k и множество U допустимых значений для функций $u_l(t)$:

$$\left.\begin{Bmatrix} \dot{x}_k = \sum_{i=1}^{r} \varphi_{kl}(x) u_l(t) \\ \updownarrow \quad x \leftrightarrow \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}}_k = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\varphi}_{kl}(\tilde{x}) u_l(t) \end{Bmatrix}\right. \Leftrightarrow \left\{ n, C_{ij}^k, U \right\} \qquad (3.2)$$

Соответствие – взаимно однозначно: по структурным постоянным C_{ij}^k в некоторых переменных вычисляется базис $\breve{X}_1, \ldots, \breve{X}_n$ алгебры Ли [3] , по операторам $\breve{X}_l$ определяется представитель класса эквивалентности (3.2) с возможностью заменой переменных перейти к другому представителю. Набор $\left\{n, C_{ij}^{k}, U\right\}$ являет собой пример инвариантной математической модели динамической системы. По этому набору можно исследовать те свойства системы, которые сохраняются при заменах переменных x: наличие первых интегралов, инвариантных поверхностей и т.д. Алгебраическая структура, определяемая C_{ij}^{k}, позволяет строить в соответствующем классе эквивалентности (3.2) представители специального вида: линейного, билинейного, двухуровневого, блочного и т.д.

4. Групповая система, моделирующая экосистему

Предлагается следующая модель экосистемы (k_i – показатель степени):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u_2(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u_n(t) + \begin{pmatrix} c_1 x_1^{k_1+1} & x_2^{k_2} & \dots & x_n^{k_n} \\ c_2 x_1^{k_1} & x_2^{k_2+1} & \dots & x_n^{k_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n x_1^{k_1} & x_2^{k_2} & \dots & x_n^{k_n+1} \end{pmatrix} u_{n+1}(t) \tag{4.1}$$

где $x_i > 0$ – биомассы взаимодействующих видов, c_i , k_i – числа, $u_i(t)$ – произвольные функции. При $u_{n+1}(t) \equiv 0$ система (4.1) – уравнения Мальтуса. При $n = 1$ уравнение (4.1) – логистическое уравнение Ферхюльста. При $n = 2$ система (4.1) – модификация уравнений Лотки – Вольтерра [1]. Системе (4.1) соответствуют операторы (2.5):

$$X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},\ X_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2},\ \dots,\ X_n = x_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$$X_{n+1} = c_1 x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_1} + c_2 x_1^{k_1+1} x_2^{k_2+1} \cdots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \\ + c_n x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n+1} \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{4.2}$$

Вычисление коммутаторов (2.6) приводит к результатам

$[X_i;X_j] = 0;\ i, j = \overline{1, n}$, $[X_i; X_{n+1}] = k_i X_{n+1};\ i = \overline{1, n}$ (4.3) т. е. условие (2.4) для системы (4.1) выполняется при[1]

$$C_{in+1}^{n+1} = k_i\,,\ i = \overline{1,n} \tag{4.4}$$

С учетом (4.3) нетрудно убедиться в том, что при выполнении условий

$$x_1 > 0, \ldots, x_n > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} |c_i| \neq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} |k_i| \neq 0 \tag{4.5}$$

требования (2.2) – (2.4) удовлетворены, т.е. система (4.1) является групповой. Для определенности далее предполагаем k1 *6* = 0 и условия используем в следующем виде

$$x_1 > 0, \ldots, x_n > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} |c_i| \neq 0, \quad k_1 \neq 0 \tag{4.5}$$

Для системы (4.1) выполнено условие $n+1 = r > n$ теоремы 2.2, поэтому добавлением уравнения (2.9) для переменной x_{n+1} (вычисления опущены) система (4.1) погружается в класс L – систем:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u_2(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u_n(t) + \begin{pmatrix} c_1 x_1^{k_1+1} & x_2^{k_2} & \ldots & x_n^{k_n} \\ c_2 x_1^{k_1} & x_2^{k_2+1} & \ldots & x_n^{k_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n x_1^{k_1} & x_2^{k_2} & \ldots & x_n^{k_n+1} \\ x_1^{k_1} & x_2^{k_2} & \ldots & x_n^{k_n} \end{pmatrix} u_{n+1}(t) \tag{4.6}$$

Для L–системы (4.6) по сравнению с системой (4.1) дополняются операторы (4.2):

$$X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1},\ X_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2},\ \ldots,\ X_n = x_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= c_1 x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_1} + c_2 x_1^{k_1+1} x_2^{k_2+1} \cdots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \\ &+ c_n x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n+1} \frac{\partial}{\partial x_n} + x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \end{aligned} \tag{4.7}$$

причем для (4.7) справедливы те же равенства (4.3), (4.4), что и для операторов (4.2).

[1] Здесь и далее приводятся только ненулевые структурные постоянные C_{ij}^{k}, удовлетворяющие условию $i < j$.

L–система (4.6) порождает инвариантную модель $\left\{n+1, C_{ij}^k, U\right\}$ (см. п. 3), где C_{ij}^k приведены в (4.4), а $U = R^{n+1}$.

5. Алгебраические преобразования L–системы

Набор (4.4) структурных постоянных C_{ij}^k характеризует алгебру Ли с базисом (4.7): (n+1)–мерная нильпотентная алгебра, у которой производная алгебра одномерна и не принадлежит центру [5]. Структура алгебры дает возможность сменой базиса упростить набор C_{ij}^k. Из «таблицы умножения» (4.3) следует ($k_1 \neq 0$, см. (4.5))

$$\left[\frac{1}{k_1}X_1, X_j\right] = 0, \quad \left[\frac{1}{k_1}X_1, X_{n+1}\right] = X_{n+1},$$

$$\left[k_1X_i - k_iX_1, X_j\right] = 0, \quad \left[k_1X_i - k_iX_1, X_{n+1}\right] = 0,$$

$$i = \overline{2,n}, \ \ j = \overline{1,n}$$

Для новых базисных операторов

$$Y = \frac{1}{k_1}X_1, \quad Y_i = k_1X_i - k_iX_1, \quad i = \overline{2,n}, \ Y_{n+1} = X_{n+1} \tag{5.1}$$

(определитель матрицы перехода от X_i к Y_j равен $k_1^{n-2} \neq 0$) «таблица умножения» такова

$$\left[Y_1, Y_j\right] = 0, \quad \left[Y_1, Y_{n+1}\right] = Y_{n+1}, \quad \left[Y_i, Y_j\right] = 0, i = \overline{2,n}, \ \ j = \overline{1,n}$$

т.е. с базисом (5.1) алгебра Ли характеризуется структурными постоянными (см. сноску перед формулой (4.4))

$$C_{1n+1}^{n+1} = 1 \tag{5.2}$$

Переход от базиса X_i к базису Y_j можно осуществить следующим образом. Вместо произвольных функций $u_i(t)$ введем произвольные функции $\tilde{u}_i(t)$:

$$u_1 = \tfrac{1}{k_1}\tilde{u}_1 - k_2\tilde{u}_2 - \ldots - k_n\tilde{u}_n, \quad u_2 = k_2\tilde{u}_2, \ldots, u_n = k_n\tilde{u}_n, u_{n+1} = k_{n+1}\tilde{u}_{n+1} \tag{5.3}$$

(определитель матрицы перехода равен $k_1^{n-2} \neq 0$). В результате замены произвольных функций $u_i(t)$ на $\tilde{u}_i(t)$ L–система (4.6) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1/k_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{u}_1(t) + \begin{pmatrix} -k_2 x_1 \\ k_1 x_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{u}_2(t) + \ldots + \tag{5.4}$$

$$+ \begin{pmatrix} -k_n x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ k_1 x_n \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{u}_n(t) + \begin{pmatrix} c_1 x_1^{k_1+1} & x_2^{k_2} & \ldots & x_n^{k_n} \\ c_2 x_1^{k_1} & x_2^{k_2+1} & \ldots & x_n^{k_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n x_1^{k_1} & x_2^{k_2} & \ldots & x_n^{k_n+1} \\ x_1^{k_1} & x_2^{k_2} & \cdots & x_n^{k_n} \end{pmatrix} \tilde{u}_{n+1}(t)$$

Столбцы в правой части L-системы (5.4) определяют коэффициенты базисных операторов Y_j (см. (4.7), (5.1)).

6. Замена переменных в L-системе

Переход к базису (5.1) приводит к инвариантной модели

$$\left\{ n+1, C_{ij}^k, U \right\} = \left\{ n+1, C_{1n+1}^{n+1} = 1, R^{n+1} \right\}. \tag{6.1}$$

По структурным постоянным (5.2) видно, что алгебра Ли имеет n-мерный абелев идеал [5] с базисом $Y_2, \ldots, Y_{n+1}$. Тот факт, что этот идеал абелев, дает возможность одним и тем же преобразованием переменных операторы $Y_2, \ldots, Y_{n+1}$ «выпрямить» – привести к виду $Y_k = \partial / \partial y_k$ [3]. Опустив вычисления, приведем это преобразование (см. требования (4.5))

$$
\begin{aligned}
&y_1 = \ln(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}) - \tilde{c}_1 x_{n+1},\\
&y_2 = \frac{1}{k_1}\ln x_2 - \tilde{c}_2 x_{n+1},\\
&\vdots\\
&y_n = \frac{1}{k_1}\ln x_n - \tilde{c}_n x_{n+1},\\
&y_{n+1} = \frac{1}{\tilde{c}_1 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}}\left(e^{\tilde{c}_1 x_{n+1}} - 1\right).
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

где обозначено

$$
\begin{aligned}
&\tilde{c}_1 = c_1 k_1 + \ldots + c_n k_n\\
&\tilde{c}_2 = \frac{1}{k_1} c_2, \ldots, \tilde{c}_n = \frac{1}{k_1} c_n
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Замена переменных (6.2) в системе дифференциальных уравнений (5.4) приводит к

L–системе

$$
\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \\ \dot{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -y_{n+1} \end{pmatrix} \tilde{u}_1(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{u}_2(t) + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{u}_n(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}_{n+1}(t)
\tag{6.4}
$$

Операторы Y_j в переменных y_k принимают вид

$$
Y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} - y_{n+1}\frac{\partial}{\partial y_{n+1}}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \ldots, \quad Y_n = \frac{\partial}{\partial y_n}, Y_{n+1} = \frac{\partial}{\partial y_{n+1}}
$$

(6.5)

и для них условия (2.4) выполняются с теми же структурными постоянными, что и в переменных x_k.

По сравнению с L–системами (4.6) и (5.4) система (6.5) обозрима и поддается всестороннему анализу. Результаты анализа при помощи взаимно однозначных преобразований (5.3), (6.2), (6.3) могут быть возвращены к исходным системам (4.1) и (4.6). Например, для системы (6.4) легко вычисляется группа (2.7) сдвигов вдоль решений:

$$y_1 = y_{10} + v_1,\, y_2 = y_{20} + v_2, \dots, y_n = y_n + v_n,\, y_{n+1} = (y_{n+10} + v_{n+1})e^{-v_1} \quad (6.6)$$

По теореме 2.1 сдвиг вдоль решений системы (6.4), соответствующий паре $\{\tilde{u}(t), t\}$ есть преобразование группы (6.6). Возврат в (6.6) при помощи (6.2) к переменным x_i приведет к группе, соответствующей системе (4.6).

Еще один пример. Пусть функции $\tilde{u}_i(t)$ принадлежат вышеупомянутому абелеву идеалу с базисом $Y_2, \dots Y_{n+1}$, т.е. $\tilde{u}_i(t) \equiv 0$. Тогда у системы (6.4) есть первый интеграл – семейство инвариантных поверхностей [6]: $y_1 = const$. Этот факт, очевидный и без алгебраических премудростей, при возврате при помощи преобразований (5.3), (6.2), (6.3) к исходным переменным формулируется так: если для системы (4.6) выполняется

$$\tilde{u}_1(t) = k_1 u_1(t) + \dots + k_n u_n(t) \equiv 0,$$

то у системы (4.6) при любых функциях $u_i(t)$ есть первый интеграл – семейство инвариантных поверхностей

$$y_1 = \ln(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}) - (c_1 k_1 + \dots + c_1 k_n) x_{n+1} = const.$$

Приведенный результат методом разглядывания системы (4.6) усматривается неохотно.

7. Заключение

Необычный учет в (4.1) взаимодействия видов (в отличие от хрестаматийного $x_i x_j$) оправдан тем, что система (4.1) порождает (n+1)–параметрическую группу сдвигов вдоль решений, соответствующих всевозможным парам $\{u(t), t\}$. Этот факт устанавливается коммутированием (4.3) соответствующих операторов (4.2). На основе этого факта регулярными алгоритмическими действиями система (4.1) эквивалентно преобразуется в линейную по переменным состояния систему (6.4). Система (6.4) поддается всестороннему анализу, результаты которого допускают перенос на исходную систему (4.1). Для системы (6.4), в частности, приведена группа сдвигов вдоль решений и пример инвариантных поверхностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00697) и Совета Программ поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96137).

Литература.

1. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002, 232 с.
2. Яковенко Г.Н. Математическое моделирование эволюционных процессов алгебрами Ли // Труды Российской ассоциации – Женщины-математики. Математика. Экономика. Образование. Ряды Фурье и их приложения. Т. 10, вып. 1/ Под ред. Б.И. Голубова, И.С. Гудович, И.Я. Новикова. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2002. – С. 101 –107.
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
4. Яковенко Г.Н. Принцип суперпозиций для нелинейных систем: Софус Ли и другие. М.: Изд. МФТИ, 1997. 96 с.
5. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964. 356 с.
6. Яковенко Г.Н. Управление на группах Ли: первые интегралы, особые управления // Кибернет. и вычисл. техн. / Киев, 1984. Вып. 62. С.10 – 20.