ОПТИМИЗАЦИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Глухова Н.А.

(Рязань)

Рассматривается задача поиска оптимального управления в условиях неопределенности для систем с неизвестным видом общего решения. Предполагается, что известно одно частное решение системы при некотором значении управления. Исследование проводится на сужении исходных множеств допустимых управлений и начальных значений. Для граничных точек выбранного сужения множества допустимых управлений сформулированы необходимые и достаточные условия оптимальности. Подобная задача изучается в работах [2, 3] для линейных систем. В отличие от работ [1, 3] в данной статье не используется аппарат выпуклого анализа.

OPTIMISATION OF QUALITY CRITERION FOR NONLILEAR SYSTEMS

Glukhova N.A.

(Ryazan)

The problem of searching of optimum control function in conditions of indeterminacy for systems with an unknown kind of general solution is considered. It is supposed, that one particular solution of system at some value of control is known. The research is being carried out on narrowing original sets of admissible control functions and initial data. For boundary points of chosen narrowing of set of admissible controls the necessary and sufficient conditions of optimality are formulated. The similar problem is studied in works [2, 3] for linear systems. As against works [1, 3] in this article the methods of the convex analysis is not used.

Пусть движение управляемой n-мерной системы подчиняется уравнению

$$\dot{x} = f(t, x, v), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $v \in R^p$, $p \le n$, $t \in [t_0; T]$. Класс допустимых управлений обозначим $V(\cdot)$.

Пусть функция $f(t, x, v)$, определенная во множестве $\Omega = [t_0; T] \times \Gamma \times V$, такова, что при любом управлении $v(\cdot) \in V(\cdot)$ для любого начального значения $x^0 \in \Gamma$ существует единственное решение $x = x(t; x^0, v(\cdot))$ системы (1), удовлетворяющее условию $x^0 = x(t_0; x^0, v(\cdot))$, которое можно продолжить вплоть до границы множества $[t_0; T] \times \Gamma$.

Предположим, что имеет место неопределенность по начальным данным, то есть, информация о состоянии системы при $t = t_0$ задается включением $x^0 = x(t_0; x^0, v(\cdot)) \in X^0$, где X^0 – заданное выпуклое компактное множество в R^n, $X^0 \subset \Gamma$, $v(\cdot) \in V(\cdot)$.

Пусть C – выпуклый компакт в R^n, для которого $c = 0$ является внутренней точкой. Управления $u(\cdot)$ будем искать в виде $u(t) = K(t)c$, где $K(t)$ – $p \times n$-матрица, элементами которой являются ограниченные измеримые известные функции, $c \in C$.

Будем считать, что для любого $v(\cdot) \in V(\cdot)$ и всех $x^0 \in X^0$ решение системы (1) определено на всем отрезке $[t_0; T]$, непрерывно зависит от начальных данных и параметра c и имеет непрерывные частные производные по начальным данным и параметру до второго порядка включительно.

Пусть при значении управления $v = v^0$ система (1) имеет решение $x = \bar{x}(t; x^0, v^0)$. Заменой переменных $y = x - \bar{x}(t; x^0, v^0)$, $u = v - v^0$ система (1) сводится к системе

$$\dot{y} = f_1(t, y, u), \tag{2}$$

в которой $f_1(t, y, u) = f(t, y + \bar{x}(t; x^0, v^0), u + v^0) - f(t, \bar{x}(t; x^0, v^0), v^0)$.

Будем предполагать, что в системе (2) вектор-функция $f_1(t,y,u)$ определяется равенством $f_1(t,y,u)=A(t)y+B(t,u)+\psi(t,y,u)$.

Введем множества $U(\delta_0)=\{u \mid u=v-v^0, v\in V(\cdot), \|u\|\le\delta_0\}$, где $\delta_0>0$ – некоторое число, $C(\delta_0)=\{c \mid c\in C, u(t)=K(t)c, u\in U(\delta_0)\}$, $Y^0=X^0-x^0=\{y^0 \mid y^0=x-x^0, x\in X^0\}$, $Y(t;c)=\{y \mid y=y(t;y^0,c), y^0\in Y^0\}$, $Y^0(\delta_0)=\{y^0 \mid y^0\in Y^0, |y^0|\le\delta_0\}$, множество вариаций управления $H(u^0(\cdot))=\{h(\cdot) \mid h(t)=u(t)-u^0(t), t\in[t_0;T], u(\cdot)\in U(\delta_0)\}$ и параметра $H(c^0)=\{h \mid h=c-c^0, c\in C(\delta_0), u^0(t)=K(t)c^0, u(t)=K(t)c\}$. Обозначим $\gamma=(y^0,c)$.

Подстановкой $u(t)=K(t)c$ система (2) сведется к системе

$$\dot{y}=A(t)y+\overline{B}(t,c)+\overline{\psi}(t,y,c), \tag{3}$$

в которой $\overline{B}(t,0)\equiv 0$, $\overline{\psi}(t,y,c)=\Psi(t,y,c)y$. Будем предполагать, что $\lim\limits_{\gamma\to 0}\Psi(t,y,c)=0$ равномерно на множестве $[t_0;T]$, вектор-функции $\overline{B}(t,c)$ и $\overline{\psi}(t,y,c)$ имеют производные по c и по (y,c) соответственно до третьего порядка. Пусть $\lambda\in[0;1]$, $\varphi=\varphi(y)$ – функция, определенная в R^n, имеющая непрерывные частные производные по всем координатам вектора y до второго порядка на множестве $Y(t;c)$ при всех $c\in C(\delta_0)$. Определим функцию $\Phi(c)$ равенством

$$\Phi(c)=\max_y \varphi(y),\ y\in Y(T;c). \tag{4}$$

Ставится задача: во множестве $C(\delta_0)$ найти c^0, доставляющее минимум функции (4), то есть, такое c^0, что $\Phi(c^0)=\min\limits_c \max\limits_{y^0}\left(\varphi\left(y(T;y^0,c)\right)\right), c\in C(\delta_0), y^0\in Y^0$.

Предположим, что $y=\overline{y}(t;y^0,c)$ – некоторое решение системы (3) с начальным условием $y^0\in Y^0$, найденное при значении управления $c\in C$. Одновременно с системой (3) рассмотрим систему

$$\dot{y} = A(t)y + \overline{B}(t,c) + \overline{\psi}(t,\overline{y},c). \tag{5}$$

Лемма 1. Решение $y = \overline{y}(t;y^0,c)$ системы (3) будет решением системы (5) и обратно, решение $y = \widetilde{y}(t;y^0,c)$ системы (5), удовлетворяющее начальному условию $\widetilde{y}(t^0;y^0,c) = y^0$, является решением системы (3), причем $\widetilde{y}(t;y^0,c) \equiv \overline{y}(t;y^0,c)$.

Лемма 2. Если в системе (5) вектор-функция $\overline{B}(t,c)$ имеет производные второго порядка по координатам вектора c, $\overline{\psi}(t,y,c) = \overline{\Psi}(t,y,c)y$, причем $\lim\limits_{\gamma\to 0}\overline{\Psi}(t,y,c) = 0$ равномерно на множестве $[t_0;T]$, то существует такое число $\theta > 0$, что для всех $c \in C$, $|c| \le \theta$, решение $y = \overline{y}(t;y^0,c)$ системы (5) можно представить в виде $\overline{y}(t) = Y(t)y^0 + \overline{B}_1(t)c + o(|c|) + \widetilde{\varphi}(t,c)$, где $\lim\limits_{|\gamma|\to 0}|\widetilde{\varphi}(t,c)|/|\gamma| = 0$ на отрезке $[t_0;T]$.

Согласно лемме 2 решение $y = \overline{y}(t;y^0,c)$ системы (3) представимо в виде

$$y(t) = Y(t)y^0 + B_1(t)c + B_2(t)[c]^2 + \Psi_1(t)[y^0]^2 + \Psi_2(t)[y^0c] + o(|\gamma|^2). \tag{6}$$

Разложим функцию $\varphi(y)$ по формуле Тейлора в окрестности решения $y \equiv 0$: $\varphi(y) = \varphi(0) + I_1(0)y + \dfrac{1}{2}I_2(0)[y]^2 + o(|y|^2)$. Тогда $\dfrac{d\varphi}{dy} = I_1(0) + y^T\bar{I}_2(0) + o(|\gamma|)$.

Учитывая разложение (6), имеем

$$\frac{d\varphi}{dy} = I_1(0) + \left(Y(t)y^0\right)^T\bar{I}_2(0) + \left(B_1(t)c\right)^T\bar{I}_2(0) + o(|\gamma|).$$

Вычислим производную решения по параметру c в произвольной, но фиксированной точке γ из малой окрестности нуля, получим $\dfrac{dy}{dc} = B_1(t) + L_c(t) + L_{y^0}(t) + o(|\gamma|)$, где L_c, L_{y^0} – $n\times n$-матрицы, элементами которых являются линейные комбинации координат векторов c и y^0 соответственно.

Обозначим $D\left(T;y^0,c\right)=\frac{d\varphi}{dy}\left(y\left(T;y^0,c\right)\right)\frac{dy}{dc}\left(T,y^0,c\right)$. Тогда

$$\begin{aligned}&D\left(T;y^0,c\right)=I_1(0)B_1(T)+\left(Y(T)y^0\right)^T\bar{I}_2(0)B_1(T)+\\&+\left(B_1(T)c\right)^T\bar{I}_2(0)B_1(T)+I_1(0)L_c(T)+I_1(0)L_{y^0}(T)+o(|\gamma|)\end{aligned}.$$

Пусть $F_1(T,0,0)=I_1(0)B_1(T)$. Из суммы $\left(Y(T)y^0\right)^T\bar{I}_2(0)B_1(T)+I_1(0)L_{y^0}(T)$ выделим вектор y^{0T}, оставшуюся матрицу размерности $n\times n$ обозначим $\bar{L}_{y^0}$. Из суммы $\left(B_1(T)c\right)^T\bar{I}_2(0)B_1(T)+I_1(0)L_c(T)$ выделим вектор c^T, оставшуюся матрицу размерности $n\times n$ обозначим $\bar{L}_c$. Тогда выражение для $D\left(T;y^0,c\right)$ представимо в виде

$$\begin{aligned}&D\left(T;y^0,c\right)=F_1(T,0,0)+y^{0T}\bar{L}_{y^0}+c^T\bar{L}_c+o(|\gamma|)=\\&=F_1(T,0,0)+\gamma^T F_2(T,0,0)+o(|\gamma|)\end{aligned}. \tag{7}$$

Разложим функцию $\varphi\left(y\left(T;y^0,c\right)\right)$ в окрестности решения $y\left(T;y^0,c^0\right)$ по формуле Тейлора, получим

$$\varphi\left(y\left(T;y^0,c^0+\lambda h\right)\right)=\varphi\left(y\left(T;y^0,c^0\right)\right)+D\left(T;y^0,c^0\right)\lambda h+o(|\lambda h|).$$

Исследуем вопрос об управляемости системы (3) в случае, когда вектор $F_1(T,0,0)$ в разложении (7) отличен от нулевого. Введем обозначение: $\Gamma_\gamma(r)=\{\gamma\ |\ |\gamma|\le r\}$.

Теорема 1. (Необходимое условие оптимальности) Пусть $c^0\in C$. Тогда для того, чтобы точка c^0 доставляла минимум функции $\Phi(c)$, необходимо, чтобы для любого $h\in H\left(c^0\right)\setminus\{0\}$ выполнялось условие $\max\limits_{y^0\in Y^0}\left(D\left(T;y^0,c^0\right)h\right)\ge 0$.

Доказательство. Зафиксируем $h\in H\left(c^0\right)\setminus\{0\}$ и рассмотрим приращение функции $\Phi(c)$ в точке c^0

$$\Phi\left(c^0+\lambda h\right)-\Phi\left(c^0\right)=\max_{y^0}\left(\varphi\left(y\left(T;y^0,c^0+\lambda h\right)\right)\right)-\max_{y^0}\left(\varphi\left(y\left(T;y^0,c^0\right)\right)\right)\le$$

$\le\max\limits_{y^0}\left(D\left(T;y^0,c^0\right)\lambda h\right)+\max\limits_{y^0}\left(o(|\lambda h|)\right)$. Справедливость утверждения теоремы следует из того, что в достаточно малой окрестности нуля знак суммы $\max_{y^0}\left(D\left(T; y^0, c^0\right)\lambda h\right) + \max_{y^0}\left(o\left(\left|\lambda h\right|\right)\right)$ определяется знаком первого слагаемого.

Теорема 2. Если выполнено неравенство $F_1(T,0,0) \neq 0$, то существует такое число $\kappa > 0$, что при $\gamma \in \Gamma_\gamma(\kappa)$ ни одно значение c из окрестности нуля $\Gamma_c(\kappa)$ не является точкой минимума функции $\Phi(c)$.

Доказательство. Докажем, что при $F_1(T,0,0) \neq 0$ равенство $F_1(T,0,0)h = 0$ при всех значениях h выполняться не может. Предположим противное. Тогда выберем n линейно независимых векторов $h_1,\ldots,h_n$ и рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(T,0,0)h_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_1(T,0,0)h_n = 0 \end{cases}$$

относительно координат вектора $F_1(T,0,0)$. Очевидно, эта система имеет единственное решение $F_1(T,0,0) = 0$, что противоречит условию теоремы.

Пусть при некотором значении $h \in H(c) \setminus \{0\}$ выполнено неравенство $F_1(T,0,0)h \neq 0$. Так как $\lim_{\gamma \to 0}\left(\gamma^T F_2(T,0,0)h + o\left(\left|\gamma\right|\right)h\right) = 0$, то существует такое число $\kappa > 0$, что при всех значениях γ, для которых $|\gamma| < \kappa$, выполнено неравенство $\left|\gamma^T F_2(T,0,0)h + o\left(\left|\gamma\right|\right)h\right| < \left|F_1(T,0,0)h\right|$. Таким образом, в достаточно малой окрестности нуля $\Gamma_\gamma(\kappa)$ знак $D\left(T; y^0, c\right)h$ будет определяться знаком слагаемого $F_1(T,0,0)h$. Так как $F_1(T,0,0)h$ не зависит от y^0, то знак $F_1(T,0,0)h$ определит также знак $\max_{y^0}\left(D\left(T; y^0, c\right)h\right)$, вычисляемого в указанной окрестности.

Пусть при некотором $h \in H(c) \setminus \{0\}$ выполнено неравенство $F_1(T,0,0)h > 0$. Так как вектор c принадлежит открытой окрестности, то существует число $\alpha > 0$, такое, что $\bar{h} = -\alpha h \in H(c) \setminus \{0\}$. Тогда справедливо неравенство $F_1(T,0,0)\bar{h} < 0$, а, следовательно, в указанной окрестности нуля $\max\limits_{y^0}\left(D\left(T; y^0, c\right)\bar{h}\right) < 0$, что противоречит теореме 1. Полученное противоречие доказывает, что ни одна точка из соответствующей окрестности $\Gamma_c(\kappa)$ не является точкой минимума функции $\Phi(c)$. Доказательство в случае, когда $F_1(T,0,0)h < 0$, очевидно. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 утверждает, что если $F_1(T,0,0) \neq 0$ и $C \subset \Gamma_c(\kappa)$, то оптимальное управление c^0 может лежать только на границе множества C.

Лемма 3. Для того, чтобы существовала окрестность начала координат $\Gamma_\gamma(\tilde{\kappa})$, для точек которой справедливо неравенство $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma_\gamma(\tilde{\kappa})}\left(\left|F_1(T;0,0) + y^{0T}\bar{L}_{y^0} + c^T\bar{L}_c\right|\right) \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы вектор $F_1(T;0,0)$ был ненулевым.

Теорема 3. Если $F_1(T;0,0) \neq 0$, то существует число $\kappa^* \leq \tilde{\kappa}$, такое, что для точек γ из множества $\Gamma_\gamma(\kappa^*)$ справедливо неравенство $\left|o(|\gamma|)\right| < \left|F_1(T;0,0) + y^{0T}\bar{L}_{y^0} + c^T\bar{L}_c\right|$.

Доказательство. Так как $F_1(T;0,0) \neq 0$, то по лемме 3 существует число $\tilde{\kappa} > 0$, такое, что для точек $\gamma \in \Gamma_\gamma(\tilde{\kappa})$ справедливо неравенство $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma_\gamma(\tilde{\kappa})}\left(\left|F_1(T;0,0) + y^{0T}\bar{L}_{y^0} + c^T\bar{L}_c\right|\right) \neq 0$. Найдется число $\delta^* > 0$, такое, что справедлива оценка $\left|o(|\gamma|)\right| < \inf\limits_{\gamma\in\Gamma_\gamma(\tilde{\kappa})}\left(\left|F_1(T;0,0) + y^{0T}\bar{L}_{y^0} + c^T\bar{L}_c\right|\right)$ как только $|\gamma| \leq \delta^*$. А так как $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma_\gamma(\tilde{\kappa})}\left(\left|F_1(T;0,0) + y^{0T}\bar{L}_{y^0} + c^T\bar{L}_c\right|\right) \leq \left|F_1(T;0,0) + y^{0T}\bar{L}_{y^0} + c^T\bar{L}_c\right|$ для любых $\gamma \in \Gamma_\gamma(\tilde{\kappa})$, то, выбрав $\kappa^* = \min\{\delta^*, \tilde{\kappa}\}$, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Аналогично доказательству теоремы 2 убедимся в справедливости теоремы 4.

Теорема 4. Если $F_1(T,0,0) \neq 0$, то ни одна внутренняя точка множества $\Gamma_c(\kappa^*)$ не доставляет минимума функции $\Phi(c)$.

Лемма 4. Пусть для некоторого направления h справедливо неравенство $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma_\gamma(\kappa^*)} \left(\left| \left(F_1(T;0,0) + y^{0T} \overline{L}_{y^0} + c^T \overline{L}_c \right) h \right| \right) \neq 0$. Тогда существует такое число $\kappa_h > 0$, что в окрестности $\Gamma_\gamma(\kappa_h)$ выполняется условие $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma_\gamma(\kappa_h)} \left(\left| \left(F_1(T;0,0) + y^{0T} \overline{L}_{y^0} + c^T \overline{L}_c + o(|\gamma|) \right) h \right| \right) \neq 0$.

Теорема 5. Пусть для некоторого направления $h \in H(c^0) \setminus \{0\}$ справедливо неравенство $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma_\gamma(\kappa^*)} \left(\left| \left(F_1(T;0,0) + y^{0T} \overline{L}_{y^0} + c^T \overline{L}_c \right) h \right| \right) \neq 0$. Тогда для того, чтобы точка $c^0 \in \partial \Gamma_c(\kappa_h)$ доставляла минимум функции $\Phi(c)$ по направлению h, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\left(F_1(T;0,0) + c^{0T} \overline{L}_c \right) h > 0$.

Доказательство. Пусть точка $c^0 \in \partial \Gamma_c(\kappa_h)$ доставляет минимум функции $\Phi(c)$ по направлению h. Согласно теореме 1 при этом выполняется условие $\max\limits_{y^0 \in \Gamma_{y^0}^{**}(h)} \left(D(T; y^0, c^0) h \right) \geq 0$. По условию теоремы $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma_\gamma(\kappa^*)} \left(\left| \left(F_1(T;0,0) + y^{0T} \overline{L}_{y^0} + c^T \overline{L}_c \right) h \right| \right) \neq 0$, поэтому для любого $y^0 \in \Gamma_{y^0}(\kappa_h)$ выполнено $\left| \left(F_1(T;0,0) + y^{0T} \overline{L}_{y^0} + c^{0T} \overline{L}_c \right) h \right| \neq 0$, а значит, для всех $y^0 \in \Gamma_{y^0}(\kappa_h)$ выражение $\left(F_1(T;0,0) + y^{0T} \overline{L}_{y^0} + c^{0T} \overline{L}_c \right) h$ имеет один и тот же знак. Так как выполнено условие $\max\limits_{y^0 \in \Gamma_{y^0}(\kappa_h)} \left(D(T; y^0, c^0) h \right) \geq 0$, то значения этого выражения положительны. При значении $y^0 = 0$ получим утверждение теоремы.

Пусть выполнено неравенство $\left(F_1(T;0,0) + c^{0T} \overline{L}_c \right) h > 0$. Тогда так как $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma_\gamma(\kappa^*)} \left(\left| \left(F_1(T;0,0) + y^{0T} \overline{L}_{y^0} + c^T \overline{L}_c \right) h \right| \right) \neq 0$, то при всех $y^0 \in \Gamma_{y^0}(\kappa_h)$ справедливо неравенство $\left(F_1(T;0,0) + y^{0T} \overline{L}_{y^0} + c^{0T} \overline{L}_c \right) h > 0$. По лемме 4 тогда при всех значениях $y^0 \in \Gamma_{y^0}(\kappa_h)$ справедливо неравенство $D(T; y^0, c^0)h > 0$. При малых значениях $\lambda > 0$ приращение $\Delta\varphi(y(T; y^0, c^0)) = D(T; y^0, c^0)\lambda h + o(|\lambda h|)$ положительно, следовательно, $\Phi(c^0 + \lambda h) > \Phi(c^0)$, что и требовалось доказать.

Для каждой точки c^0 введем множество $E(c^0) = \{e \mid e = h/|h|, h \in H(c^0) \setminus \{0\}\}$. Пусть $\widetilde{H}^0$ – множество таких значений h, для которых выполнено неравенство $\inf\limits_{\gamma \in \Gamma_\gamma(\kappa^*)} \left(\left| \left(F_1(T;0,0) + y^{0T} \overline{L}_{y^0} + c^T \overline{L}_c \right) h \right| \right) \neq 0$. Во множестве $\widetilde{H}^0$ выделим замкнутое подмножество H^0. Определим множество $E^0 = \{e \mid e = h/|h|, h \in H^0\}$. Тогда множество $\Gamma_\gamma = \bigcap\limits_{e \in E^0} \Gamma_\gamma(\kappa_e)$ замкнуто и не является одноэлементным.

Теорема 6. Пусть c^0 – граничная точка множества Γ_c и $E(c^0) \subset E^0$. Для того, чтобы точка $c^0 \in \partial\Gamma_c$ доставляла минимум функции $\Phi(c)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $e \in E(c^0)$ выполнялось неравенство $\left(F_1(T;0,0) + c^{0T}\overline{L}_c\right)e > 0$.

Доказательство. Поскольку для любого направления $e \in E(c^0)$ выполнено условие теоремы 5, справедливость утверждения теоремы очевидна.

Теоремы 5 – 6 позволяют сконструировать множество Γ_c таким образом, что оптимальное управление c^0 будет являться его граничной точкой.

Литература.

1. Ананьина Т.Ф. Задача управления по неполным данным // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 4. С. 612 – 620.
2. Глухова Н.А. Оптимизация критерия качества во внутренних точках выпуклых множеств / Ряз. гос. пед. ун-т. – Рязань, 2002. – 10 с. Деп. в ВИНИТИ 30.09.02, № 1645-В2002.
3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977. – 394 с.