# ОЦЕНКА ПОЛОЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

**Ивличев П.С.**

(Рязань)

Рассматривается вопрос существования периодических решений автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с нулевой матрицей линейного приближения. Предполагается, что правая часть системы представима в виде суммы форм относительно координат векторов решения и параметра. Сформулированы необходимое и достаточное условия существования периодического решения в окрестности начала координат. Приводится способ оценки положения периодического решения в окрестности нуля с точностью до сектора. Подобные задачи ставились также в работе [2] для неавтономных систем. В работе [1] приведен способ определения периода для автономных систем.

# ESTIMATION OF A POSITION OF THE PERIODIC SOLUTION OF AUTONOMOUS SYSTEMS

**Ivlitchev P.S.**

(Ryazan)

The problem of existence of the periodic solutions for autonomous systems of the ordinary differential equations with a null matrix of linear approximation is considered. It is supposed, that the right part of a system is the sum of the forms of coordinates of vectors of the solution and parameter. The necessary and sufficient conditions of existence of the periodic solution in a vicinity of origin of coordinates are formulated. The method to estimate a position of the periodic solution in the vicinity of zero to with precision to a sector is presented. The similar problem were also put in work [2] for nonautonomous systems. In work [1] the way of definition of the period for autonomous systems is given.

Пусть состояние некоторого объекта описывается автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида.

$$\dot{x} = f(x,\lambda), \tag{1}$$

в которой вектор $x \in R^n$ описывает положение объекта, $\lambda \in R^m$ – параметр внешнего воздействия. Предположим, что вектор-функция $f(x,\lambda)$ представляет собой конечную сумму форм нескольких порядков по совокупности координат векторов $x$ и $\lambda$, то есть ее можно представить равенством $f(x,\lambda) = \sum_{i=k}^{\bar{k}} f^i(x,\lambda)$, где $f^i(x,\lambda)$ – форма порядка $i$ по $(x,\lambda)$, $f^i(0,\lambda) = 0$, причем при любом $i$ координаты вектора $x$ входят в элементы вектора $f^i(x,\lambda)$ в степени выше, чем первая и $k \geq 3$. Пусть правая часть системы (1) такова, что система (1) удовлетворяет условию существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра на множестве $(x,\lambda) \in W(\delta_0) \times \Lambda(\delta_0)$.

Очевидно, что решением системы (1) является вектор $x \equiv 0$, поэтому существует число $\delta \in (0;\delta_0]$, такое, что при любых $\alpha \in W(\delta)$ и $\lambda \in \Lambda(\delta)$ решение $x = x(t,\alpha,\lambda)$ системы (1) определено на сегменте $[0;T]$, где $T > 0$ – некоторое число.

Ставится задача: определить условия существования вектора $z = (\omega,\alpha,\lambda) \in Z$, такого, что система (1) при $\lambda \in \Lambda(\delta)$ имеет $\omega$-периодическое решение $x = x(t,\alpha,\lambda)$, удовлетворяющее равенству $x(0,\alpha,\lambda) = \alpha$.

Поставленную задачу будем решать в предположении о том, что правая часть системы (1) представима равенством $f(x,\lambda) = F(x,\lambda)x$, где $F(x,\lambda)$ – неизвестная $n \times n$-матрица.

Одновременно с системой (1) рассмотрим системы

$$\dot{x} = F(\bar{x},\lambda)x, \tag{2}$$

$$\dot{x} = f(\bar{x},\lambda). \tag{3}$$

Справедлива следующая теорема

**Теорема 1.** Решение $x = \bar{x}(t, \alpha, \lambda)$ системы (1) будет решением систем (2) и (3) и обратно, решение $y = y(t, \alpha, \lambda)$ системы (2) или (3), удовлетворяющее начальному условию $y(0, \alpha, \lambda) = \alpha$, является решением системы (1), и эти решения совпадают: $\bar{x}(t, \alpha, \lambda) \equiv y(t, \alpha, \lambda)$.

Система (2) является линейной однородной. Тогда ее решение можно записать в виде $x = Y(t, \alpha, \lambda)\alpha$, где матрица $Y(t, \alpha, \lambda)$ – фундаментальная матрица решений системы (2), причем $Y(0, \alpha, \lambda) = E$, $E$ – единичная матрица.

**Лемма 1.** Решение $x = \bar{x}(t, \alpha, \lambda)$ системы (1) можно представить в виде

$$\bar{x}(t, \alpha, \lambda) = \alpha + o(|\alpha|). \tag{4}$$

**Доказательство.** Матрицу $\Phi(t, \alpha, \lambda)$ определим равенством $\Phi(t, \alpha, \lambda) = Y(t, \alpha, \lambda) - E$, следовательно, матрица $Y(t, \alpha, \lambda)$ представима в виде $Y(t, \alpha, \lambda) = \Phi(t, \alpha, \lambda) + E$. Подставим значение $Y(t, \alpha, \lambda)$ в систему (2), получим

$$\dot{E} + \Phi(t, \alpha, \lambda) = (F(\bar{x}, \lambda))(E + \Phi(t, \alpha, \lambda)).$$

Таким образом, матрица $\Phi(t, \alpha, \lambda)$ удовлетворяет матричной линейной неоднородной системе дифференциальных уравнений, решение которой представляется в виде

$$\Phi(t, \alpha, \lambda) = Y(t, \alpha, \lambda)\Gamma + Y(t, \alpha, \lambda)\int_0^t Y^{-1}(\tau, \alpha, \lambda)F(\bar{x}, \lambda)d\tau,$$

где $\Gamma$ – постоянная матрица начальных значений решений системы.

Из определения матрицы $\Phi(t, \alpha, \lambda)$ и свойств фундаментальной матрицы $Y(t, \alpha, \lambda)$ следует, что $\Phi(0, \alpha, \lambda) = 0$, поэтому $Y(0, \alpha, \lambda)\Gamma = 0$. Так как матрица $Y(0, \alpha, \lambda)$ – единичная, то из равенства $Y(0, \alpha, \lambda)\Gamma = 0$ следует, что $\Gamma = 0$. Таким образом, матрица $\Phi(t, \alpha, \lambda)$ определяется равенством $\Phi(t, \alpha, \lambda) = Y(t, \alpha, \lambda)\int_0^t Y^{-1}(\tau, \alpha, \lambda)F(\bar{x}, \lambda)d\tau$.

Заметим, что матрица $Y(t,\alpha,\lambda)$ ограничена на множестве $\bar{Z}$, а при $\alpha \to 0$ $x=\bar{x}(t,\alpha,\lambda) \to 0$ равномерно по $t$ и $\lambda$ на множестве $[0,T]\times\Lambda(\delta)$. Кроме того $F(\bar{x},\lambda)\to 0$ при $\bar{x}\to 0$, так как в элементы матрицы $F(x,\lambda)$ координаты вектора $x$ входят по меньшей мере в первой степени. Следовательно, при $\alpha \to 0$ и $\Phi(t,\alpha,\lambda)\to 0$.

Так как решение $x=\bar{x}(t,\alpha,\lambda)$ системы (1) является решением системы (2) с тем же начальным данным, то его можно представить в виде $\bar{x}=Y(t,\alpha,\lambda)\alpha=\alpha+\Phi(t,\alpha,\lambda)\alpha$.

Убедимся в справедливости равенства $\Phi(t,\alpha,\lambda)\alpha=o(|\alpha|)$. Действительно, рассмотрим единичный вектор $e=\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$, тогда

$$\lim_{|\alpha|\to 0}\frac{|\Phi(t,\alpha,\lambda)\alpha|}{|\alpha|}=\lim_{|\alpha|\to 0}\Phi(t,\alpha,\lambda)e=0.$$

Таким образом, справедливо равенство $\bar{x}=X(t)\alpha+o(|\alpha|)$, что и требовалось доказать.

Для того, чтобы решение системы (1) было периодическим с периодом $\omega$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$x(\omega,\alpha,\lambda)=\alpha .$$

Учитывая, что решение $x=\bar{x}(t,\alpha,\lambda)$ является решением системы (3), это условие можно привести к виду.

$$\int_0^\omega f(\bar{x},\lambda)dt=0 . \tag{5}$$

Поскольку для любого решения $x=\bar{x}(t,\alpha,\lambda)$ справедливо представление (4), то из вектор-функции $f(\bar{x},\lambda)$ можно выделить форму относительно координат векторов $\alpha$ и $\lambda$, причем порядок этой формы будет равен $k$ и ее коэффициенты совпадут с коэффициентами формы $f^k(x,\lambda)$, то есть функцию $f(\bar{x},\lambda)$ можно записать в виде $f(\bar{x},\lambda)=f^k(\alpha,\lambda)+o(|\alpha,\lambda|^k)$. Очевидно, что в этом представлении первое слагаемое может быть вычислено и не зависит от $t$, тогда уравнение (5) запишется следующим образом

$$\omega f^k(\alpha,\lambda)+o\left(\left|\alpha,\lambda\right|^k\right)=0\,. \tag{6}$$

Обозначим совокупность координат векторов $\alpha$ и $\lambda$ за вектор $\mu$, и определим единичный вектор того же направления равенством $e_\mu=\dfrac{\mu}{|\mu|}$.

Выберем в качестве потенциального периода решения произвольное число $\omega>0$. Заметим, что слагаемое $o\left(\left|\alpha,\lambda\right|^k\right)$ зависит от $\omega$, хотя значение $\omega$ не может изменить свойства этого вектора относительно координат векторов $\alpha$ и $\lambda$. Разделив обе части уравнения (6) последовательно на $\omega$ и $|\mu|$, получим систему

$$f^k\left(e_\mu\right)+O\left(|\mu|\right)=0\,. \tag{7}$$

**Лемма 2.** Если для некоторого вектора $e^*,\left(|e^*|=1\right)$ выполняется условие

$$f^k(e^*)\neq 0\,, \tag{8}$$

то существует такое множество $W^*\times\Lambda^*\subset W(\delta)\times\Lambda(\delta)$, что ни один вектор $z^*=(\omega,\alpha,\lambda)\in\Omega\times W^*\times\Lambda^*$ не является решением системы (7).

**Доказательство.** Пусть для некоторого вектора $e^*$ выполнено условие (8). Так как при $\mu\to 0$ $O\left(|\mu|\right)\to 0$, то существует число $\delta_1>0$, такое что при $|\mu|<\delta_1$ выполнено неравенство $\left|O\left(|\mu|\right)\right|<\left|f^k(e^*)\right|$. Последнее неравенство означает, что если вектор $z^*$ принадлежит множеству $\Omega\times W(\delta_1)\times\Lambda(\delta_1)$, то он не может являться решением системы (7). Положив $W^*\times\Lambda^*=W(\delta)\cap W(\delta_1)\times\Lambda(\delta)\cap\Lambda(\delta_1)$, получим утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть вектор $e_\mu*$ таков, что условие (8) для него не выполнено. Разложим $f^k(e_\mu)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $e_\mu*$, получим

$$f^k(e_\mu)=f^k(e_\mu*)+\left.\frac{df^k}{de_\mu}\right|_{e_\mu*}\Delta e_\mu*+o(|\Delta e_\mu*|).$$

Тогда систему (12) можно переписать в виде

$$\left.\frac{df^k}{de_\mu}\right|_{e_\mu*}(\Delta e_\mu*)+o(|\Delta e_\mu*|)+O(|\mu|)=0.$$

Введем обозначения: обозначим $\xi=\Delta e_\mu*$, $I=\left.\frac{df^k}{de_\mu}\right|_{e_\mu*}$ – матрица размерности $n\times n+m+1$. С учетом этих обозначений запишем систему (7) в виде

$$I\xi+o(|\xi|)+O(|\mu|)=0. \tag{9}$$

**Теорема 2.** Для того, чтобы система (9) имела решение с начальным данным и параметром из окрестности вектора $e_\mu*$, достаточно, чтобы $rangI=n$.

**Доказательство.** Так как $rangI=n$, то матрицу $I$ представим равенством $I=(I*,\bar{I})$, в котором $I*-n\times n$-неособенная матрица. Обозначим $\xi*$ координаты вектора $\xi$ соответствующие матрице $I*$. Оставшиеся координаты обозначим за $\bar{\xi}$ с матрицей при них $\bar{I}$. Тогда систему (9) можно записать в виде $I*\xi*+\bar{I}\bar{\xi}+o(|\xi|)+O(|\mu|)=0$ или, учитывая, что матрица $I*$ неособенная, в форме $\xi*=-I*^{-1}\left(\bar{I}\bar{\xi}+o(|\xi|)+O(|\mu|)\right)$.

Очевидно, что вектор $o(|\xi|)$ можно представить равенством

$$o(|\xi|)=o(|\xi*|)+O(\bar{\xi}).$$

Тогда так как $\bar{I}\bar{\xi}+O(\bar{\xi})=O(\bar{\xi})$, то оператор можно записать в виде

$$\xi^* = -I^{*-1}\left(O(\xi) + o(|\xi^*|) + O(|\mu|)\right). \qquad (10)$$

Докажем, что оператор (10) имеет неподвижную точку. Для этого докажем, что существует $\delta > 0$ такое, что при $|\xi^*| \le \delta$ $\left|-I^{*-1}\left(O(\xi) + o(|\xi^*|) + O(|\mu|)\right)\right| < \delta$.

По определению $o(|\xi^*|)$ существует число $\delta > 0$, такое, что при $|\xi^*| < \delta$ выполнено неравенство $\dfrac{\left|-I^{*-1} o(|\xi^*|)\right|}{|\xi^*|} < \dfrac{1}{3}$, или

$$\left|-I^{*-1} o(|\xi^*|)\right| < \frac{\delta}{3}. \qquad (11)$$

Так как $\lim\limits_{\xi \to 0} - I^* O(\xi) = 0$, то существует положительное число $\delta_1$, такое, что если $\xi < \delta_1$ выполнено неравенство

$$\left|-I^{*-1} O(\xi)\right| < \frac{\delta}{3}. \qquad (12)$$

Аналогично, существует число $\delta_2 > 0$, такое, что при $|\mu| < \delta_2$ выполнено неравенство

$$\left|-I^{*-1} O(|\mu|)\right| < \frac{\delta}{3}. \qquad (13)$$

В силу неравенств (11), (12) и (13) при $|\mu| < \delta_2$ $\xi < \delta_1$ $|\xi^*| < \delta$ выполнено неравенство $\left|-I^{*-1}\left(O(\xi) + o(|\xi^*|) + O(|\mu|)\right)\right| < \delta$, то есть оператор (10) отображает замкнутое ограниченное выпуклое множество в себя, а поскольку оператор непрерывен, то он имеет неподвижную точку, которая и будет решением системы (9). Теорема доказана.

**Следствие.** Если вектор $e_\mu{}^*$ удовлетворяет условию $f^k(e_\mu{}^*) = 0$ и $rang I = n$, то система (1) имеет периодическое решение.

Оценим радиус окрестности, в которой уравнение (9) имеет решение. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда в достаточно малой окрестности нуля будет справедлива оценка $\left|o\left(|\xi|\right)\right| \le 0{,}5 S_\varepsilon |\xi|^2$, где $S_\varepsilon = \sup\limits_{|\xi| \le \varepsilon} D^2\left(f^k\left(e_\mu\right)\right)$.

**Теорема 3.** Система (9) имеет решение $\xi = \left(\xi^*, \bar{\xi}\right)$, удовлетворяющее условию $|\xi| < \min\left\{\varepsilon; \sqrt{2/3S_\varepsilon \left\|I^{*-1}\right\|}\right\}$, при этом в качестве вектора $\bar{\xi}$ можно выбрать произвольный вектор, удовлетворяющий условию $|\bar{\xi}| < \min\left\{\varepsilon; \sqrt{2/3S_\varepsilon \left\|I^{*-1}\right\|}; \sqrt{1/3\left\|I^{*-1}\right\|\left\|\bar{I}\right\|}\right\}$.

**Доказательство.** Представим оператор (10) в виде $\xi^* = -I^{*-1}\left(\bar{I}\bar{\xi} + o\left(|\xi|\right) + O\left(|\mu|\right)\right)$, тогда непосредственными вычислениями можно убедиться в справедливости неравенств (11) и (12), чего достаточно для существования решения системы (9), теорема доказана.

**Литература.**

1. Ивличев П.С. Исследование автономных систем методом неподвижной точки оператора //Информатика и прикладная математика: Межвуз. сб. науч. тр.; Ряз. гос. пед. ун-т. – Рязань: РГПУ, 2002. С.57-60.
2. Терехин М.Т., Ретюнских Н.В. Периодические решения нелинейных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений //Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. №4. С. 566-569.