ДВА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ОДНОСТАДИЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

Аснина А.Я., Толматов Д.Н.

(Воронеж)

Рассматривается одностадийная система с параллельными приборами различной производительности. Предлагается два алгоритма построения расписания для одностадийной задачи теории расписаний для системы параллельных приборов различной производительности, связанных с оптимальным временем обслуживания в системе.

TWO SCHEDULING ALGORITHMS FOR INDEPENDENT TASK ON A UNIFORM PROCESSOR SYSTEM

Asnina A.Ya., Tolmatov D.N.

(Voronezh)

A single-stage system with uniform parallel processors is considered. Two scheduling algorithms for system of uniform processors and independent tasks are suggested.

В одностадийную систему с m приборами различной производительности поступают n требований. Каждый из m приборов может обслуживать любое требование, и разрешены прерывания в обслуживании требований. Требуется построить расписание минимальной длины.

В работе [1] предлагался двухэтапный алгоритм решения данной задачи. На первом этапе строится модель, с помощью которой для каждого прибора распределяется время, необходимое для обслуживания каждого требования. На втором этапе строится собственно расписание.

Рассмотрим задачу первого этапа. Обозначим за t_{iL} время, необходимое для обслуживания i-го требования L-м прибором.

Критерием в данной задаче будет $F_{max}(s) = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\bar{t}_i(s)\}$, где s расписание, а $\bar{t}_i(s)$ – момент завершения обслуживания i-го требования в системе. Пусть τ_{iL} фактическое время обслуживания L-м прибором i-го требования. Тогда получим следующую задачу:

$$\sum_{L=1}^{m} \frac{\tau_{iL}}{t_{iL}} = 1, \ i = 1,..,n; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{iL} \le F_{max}, \ L = 1,..,m; \tag{2}$$

$$\sum_{L=1}^{m} \tau_{iL} \le F_{max}, \ i = 1,..,n; \tag{3}$$

$$\tau_{iL} \ge 0, \ i=1,..,n; \ L=1,..,m; \tag{4}$$

$$F_{max} \to \min \tag{5}$$

В своей работе мы рассматриваем случай согласованных приборов, т.е., когда $t_{iL}=a_L * t_i$. Подставим t_{iL} в (1) и получим

$$\sum_{L=1}^{m} \frac{\tau_{iL}}{a_L \cdot t_i} = \frac{1}{t_i} \cdot \sum_{L=1}^{m} \frac{1}{a_L} \cdot \tau_{iL} = 1,$$

обозначим $b_L = 1 / a_L$, и умножим обе части на t_i.В итоге получим

$$\sum_{L=1}^{m} b_L \cdot \tau_{iL} = t_i$$

Тогда, обозначив $F_{max} = T$, задача (1) – (5), сводится к следующей:

$$\sum_{L=1}^{m} b_L \cdot \tau_{iL} = t_i, \ i = 1,..,n; \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{iL} \le T, \ L = 1,..,m; \tag{7}$$

$$\sum_{L=1}^{m} \tau_{iL} \le T,\ i = 1,..,n; \tag{8}$$

$$\tau_{iL} \ge 0,\ i=1,..,n;\ L=1,..,m; \tag{9}$$

$$T \to \min, \tag{10}$$

Как уже отмечалось в [1], оптимальное значение T представимо в виде:

$$T_{\min} = \max\left\{ \max_{1 \le p \le m-1} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{p} t_i}{\sum_{L=1}^{p} b_L} \right\},\ \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\sum_{L=1}^{m} b_L} \right\}, \tag{11}$$

Рассмотрим случай, когда оптимальное время T_{opt} расписания, рассчитываемое по формуле (11) достигается на формулах $\frac{\sum_{i=1}^{p} t_i}{\sum_{L=1}^{p} b_L}$, p = 1,…,m – 1, где b_L и t_i упорядочены следующим образом: $b_1 \ge b_2 \ge .. \ge b_m$ и $t_1 \ge t_2 \ge .. \ge t_n$. В этом случае возникает ситуация, когда первые p наиболее мощные приборы обслуживают первые p требований за время T_{opt}. Остальные же приборы начинают простаивать с некоторого момента времени. В этом случае возникают две дополнительные возможности оптимизировать расписание. Во-первых, имеет смысл для требований и приборов, не вошедших в первые p построить заново расписание. В этом случае мы добьемся общего уменьшения времени обслуживания на приборах с p+1 до m при обслуживании требований с p+1 до n. Алгоритм 1 является решением этой подзадачи. Во-вторых, можно попытаться минимизировать оставшееся количество приборов, обслуживающих оставшиеся требования. Решением данного случая является алгоритм 2.

Выделим в отдельный алгоритм расчет времени τ_{iL} для некоторого множества требований I и некоторого множества приборов P. Назовем этот алгоритм TIP.

Алгоритм TIP

Пусть I – множество обслуживаемых требований мощностью n, P – множество приборов мощностью m. Оптимальное время обслуживания T_{min}.

Введём вспомогательные векторы $T_b=(T_{b1},\ldots,T_{bm})$ и $T_t=(T_{t1},\ldots,T_{tn})$, $T'_t=(T'_{t1},\ldots,T'_{tn})$, где T_b вектор временных ресурсов для приборов, а T_t для требований, а также новый прибор с номером ноль, для которого $b_0=0$.

Полагаем компоненты векторов T_b и T_t равными T_{min}, $T'_{ti}=t_i$.

<u>Шаг</u> 1. Вычисляются $k=\min\left(i \mid b_i\cdot T_{ti}-T'_{ti}\geq 0\right)$ и $s=\max\left(i\mid T'_{ti}-b_i\cdot T_{ti}\geq 0\right)$. Далее вычисляются τ_{is} и τ_{ik} по следующим формулам

$$\overline{\tau_{is}}=\frac{T_{ts}\cdot b_k-T'_{ti}}{b_k-b_s} \tag{12a}$$

$$\overline{\tau_{ik}}=\frac{T'_{ti}-T_{tk}\cdot b_s}{b_k-b_s}. \tag{12b}$$

<u>Шаг</u> 2. Если $\overline{\tau_{is}}\leq T_{bs}$ и $\overline{\tau_{ik}}\leq T_{bk}$, тогда $\tau_{is}=\overline{\tau_{is}}$, $\tau_{ik}=\overline{\tau_{ik}}$ и $T_{bk}=T_{bk}-\overline{\tau_{ik}}$, $T_{bs}:=T_{bs}-\overline{\tau_{is}}$. Переход к <u>Шагу</u> 3.

Иначе: если $\overline{\tau_{ik}}>T_{bk}$, тогда $\tau_{ik}=T_{bk}$, $T_{ti}=T_{ti}-\tau_{ik}$, $T'_{ti}=T'_{ti}-b_k\cdot\tau_{ik}$. T_{bk} исключается из рассмотрения. Переход к <u>Шагу</u> 1.

Иначе ($\overline{\tau_{is}}>T_{bs}$) $\tau_{is}=T_{bs}$, $T_{ti}=T_{ti}-\tau_{is}$, $T'_{ti}=T'_{ti}-b_s\cdot\tau_{is}$. T_{bs} исключается из рассмотрения. Переход к <u>Шагу</u> 1

<u>Шаг</u> 3. Переход к следующему номеру из $\bar{I}$. Если переход не возможен, т.е. обслужены все требования множества $\bar{I}$, то распределение времени найдено. Иначе переход к <u>Шагу</u> 1.

Алгоритм 1

Этап 1.

Пусть i номер требования, для которого рассчитывается время обслуживания на приборах. Введем вспомогательные множества $\bar{I}$ – множество номеров требований, $\bar{P}$ – множество номеров приборов, по которым будет рассчитываться τ_{iL}. Пусть I_k – множество номеров требований, а P_k – множество номеров приборов, m_k – мощность множества P_k на k-ом шаге.

Шаг 0. Полагаем $k = 1$, $I_k = \{1, 2, \ldots, n\}$, $P_k = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Шаг 1. Вычисляем T_{min} по формуле (11) для $i \in I_k$ и $L \in P_k$, $m_k=|P_k|$.

Шаг 2. Если $T_{min} = \sum_{i \in I_k} t_i / \sum_{L \in P_k} b_L$, то переход к шагу 3. Иначе если $T_{min} = \sum_{j=1}^{M_k} t_{ij} / \sum_{s=1}^{M_k} b_{L_s}$, где $M_k < m_k$, то переход к шагу 4.

Шаг 3. $\bar{I} = I_k$, $\bar{P} = P_k$ переход к шагу 5.

Шаг 4. $\bar{I} = \{i_1, i_2, \ldots, i_M\}$, $\bar{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_{Mk}\}$ переход к шагу 5.

Шаг 5. Расчет τ_{iL} для $i \in \bar{I}$, $L \in \bar{P}$ алгоритмом TIP.

Шаг 6. Если множества I_k и P_k совпадают соответственно с $\bar{I}$ и $\bar{P}$, то останов. Иначе $I_{k+1} = I_k \setminus \bar{I}$, $P_{k+1} = P_k \setminus \bar{P}$, $k = k + 1$ переход к Шагу 1.

Этап 2 Алгоритма 1 такой же, как и для второго этапа Алгоритма [1].

Алгоритм 2

Этап 1.

Пусть i номер требования, для которого рассчитывается время обслуживания на приборах. Введем вспомогательные множества $I_0=\{1,2,..,n\}$ -исходное множество номеров требований, $P_0=\{1,2,..,m\}$- исходное множество номеров приборов. T^0_{min} – оптимальное время обслуживания требований множества I_0 приборами множества P_0. Причем $T^0_{min} = \sum_{j=1}^{p} t_j / \sum_{s=1}^{p} b_s$, где $p < m$.

Шаг 0. Разобьем множество I_0 на два подмножества I_1 =

$\{1,2, \ldots,p\}$ и $I_2 = \{p+1, \ldots,n\}$и P_0 на два подмножества $P_1 = \{1,2,\ldots,p\}$ и $P_2 = \{p+1, \ldots, m\}$. Введем множество исключенных приборов R, положим $R = \varnothing$. Введем вспомогательную переменную r – счетчик исключенных приборов, положим $r = 0$.

Шаг 1. Для множества требований I_1 и множества приборов P_1 рассчитываем τ_{iL} алгоритмом TIP со временем обслуживания $T^{0}_{\min}$.

Шаг 2. $R:= R \cup\{m – r\}$.

Шаг 3. Для множества требований I_2 и множества приборов $P` = P_2 \setminus R$ рассчитываем оптимальное время обслуживания $T^{1}_{\min}$ по формуле (11). Далее Шаг 4.

Шаг 4. Если $T^{1}_{\min} \le T^{0}_{\min}$, то $r:= r + 1$, $R:= R \cup\{m – r\}$. Далее Шаг 3.

Иначе переход к Шагу 5.

Шаг 5.Вычисляем τ_{iL} для $i \in I_2$ и $L \in P = P_2 \setminus R \cup \{m – r\}$ по алгоритму TIP.

Этап 2 Алгоритма 2 такой же, как и для второго этапа Алгоритма [1].

Литература.

1. Аснина А. Я., Толматов Д. Н. Двухэтапный алгоритм обслуживания требований для системы с параллельными приборами различной производительности // Математика. Компьютер. Образование. Вып. 8. Часть II Сборник научных трудов / под ред. Г. Ю. Ризниченко. – М.: Прогресс – Традиция, 2001, с. 457 – 462