ПРОБЛЕМА ОПТИМАЛЬНОЙ ОЧЕРЕДНОСТИ БЕЗОСТАНОВОЧНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ КОМПЛЕКСА N>>1 РАЗНОМАСШТАБНЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ЗА СЧЕТ РЕИНВЕСТИРУЕМОЙ ПРИБЫЛИ

Чистяков В.В.

(Ярославль)

Решается немарковская проблема теории расписаний определения наискорейшей очередности реконструкции N>>1 предприятий комплекса за счет отчисляемых в единый фонд накоплений, на которые непрерывно начисляются проценты. При помощи *перестановочного приема* выводится выражение для неявным образом зависящих от времени функций приоритета в прямом и обратном времени, названных ранее *упорядочивающими потенциалами*, и предлагается: а) способ ее декомпозиции на дерево подзадач меньшей размерности; б) способ решения подзадач низшего уровня методом ветвей и границ; в) способ нахождения оптимального/ε-оптимального решения при помощи т. н. «пожирающего» (greedy) алгоритма и г) точное решение оценочной задачи и сравнение результатов. Исследуется влияние инфляции.

SCHEDULING THE NON-STOP MODERNIZATION OF THE COMPLEX OF N>>1 ENTRPRISES WITH LARGELY VARIED INPUTS—OUTPUTS ON ACCOUNT OF THEIR PROFITS BEING REINVESTED

Chistyakov V.V.

(Yaroslavl)

Non-Marcovian problem of the theory of schedules is solved to minimise the complete reconstruction time for the whole complex of N>>1 enterprises which differ strongly one from the other in input-output indexes and as a result in rates of their contribution into one common fund for the reconstruction above. The percent growth and inflation decrease of these accumulations are taken into account. By using of «permutation method» the expressions are deduced for time dependent functions of priority named earlier as *ordering potentials* in direct and reversed time. Proposed are a) the way to decompose the problem in a tree of subtasks of much less dimensionalities, b) the way of solving the lowest level subtask by the method of branches and boundaries, c) so called «greedy» algorithm for finding an (ε-) optimal decision and d) an exact decision of proper evaluation problem.

I. Введение

Проблема *оптимальной очередности* выполнения заданной совокупности N>>1 работ относится к задачам комбинаторной оптимизации на множестве *перестановок* P_N натуральных чисел {1,2,...N}, мощность которого растет с размерностью N как N!. Вместе с аналогичными ей проблемами она является классической для теорий расписаний (см. [1, с.47, 60, 2, с.158, 167] и библиографию в них) и графов [3, с. 242, 265]. Наиболее известны: *NP*-полная [4] задача о *бродячем торговце*, задача о *назначениях* [3,с.265], а также проблемы оптимизации на графах, разрезания графа на подграфы, круговой расстановки станков [2], задача *Эрленкоттера* [5, с.165] *экспансии отрасли* и другие, относящиеся к производственно-транспортному планированию [там же]. (О методах решения такого рода задач большой размерности и схожих с ними см. [6, с. 184, 214]). В последнее время задачи теории расписаний все более востребованы в связи с *AI* –проблемой, т. е. проблемой создания искусственного интеллекта (artificial intelligence).

Ранее была поставлена *немарковская* (*NM*) [7, с. 15] проблема оптимальной по *критерию быстродействия* очередности безостановочной реконструкции комплекса N предприятий за счет собственных отчислений [8, с. 204, 207]. Был применен «перестановочный прием» [1], в классическом случае позволяющий оптимальным образом упорядочить объекты, работы и т. п. в соответствии с ростом/убыванием их индивидуальных показателей — «весовых функций». В [8] «веса», названные упорядочивающими потенциалами $\varphi_j(z)$, также неявным образом через текущие темпы отчислений *z* зависели от времени, исчисляемого от момента начала модернизации. Эта зависимость в общем случае не позволяла использовать эти «весовые» функции для глобального упорядочения сразу всей совокупности предприятий, но позволяла определять локальную оптимальную очередность для двух или нескольких соседних по очереди предприятий. Лишь в случае, когда «веса»-потенциалы никаких двух предприятий не пересекаются в области изменения z; «прием» применим в чистом виде. С незначительной модификацией он применим и тогда, когда имеются только отдельные пары пересечений потенциалов — «идеальный газ». Произвольный порядок расположения линий $\varphi_j(z)$ и, соответственно точек их попарного пересечения в [8] не рассматривался. Кроме того, упрощением модели являлся линейный по времени закон накопления средств в интервалах между двумя соседними реконструкциями, т. е. отсутствие учета их дополнительного роста вследствие начисления процентов, что существенно для долговременных проектов. В настоящей работе: а) исследован самый общий случай пересечения графиков функций $\varphi_i(z)$ и предложен способ нахождения оптимального/ε-оптимального решения; б) учтен качественно меняющий картину фактор начисления процентов; в) решена оценочная задача и г) исследовано влияние инфляции денежной единицы, которой исчисляются номинальные стоимостные показатели.

II. Постановка задачи

Совокупность $N>>1$ разномасштабных предприятий комплекса с номерами $i\in\{1,2,\ldots N\}$, подлежит реконструкции в минимальный срок за счет реинвестирования прибылей. Соответствующее решение принимается для момента времени $t_0=0$, и предприятия начинают отчислять средства в общий фонд реконструкции. Отчисления от предприятия i в фонд осуществляются до его реконструкции непрерывным образом с некоторым постоянным во времени темпом. После реконструкции, осуществляемой скачкообразно в тот момент, как только в фонде образуются средства в размере A_i, этот показатель возрастает также скачкообразно на величину $w_i>0$. На непрерывно поступающие на общий счет от всех предприятий средства также непрерывным образом с момента поступления начисляются проценты с показателем α (год$^{-1}$) = ln[(0.01p%+1)], p%— годовой процент. Также, возможна экспоненциальная инфляция на уровне λ (год$^{-1}$)= ln[(0.01I%+1)], I%— годовой показатель инфляции. Ограничения на очередность реконструкции отсутствуют. Необходимо построить алгоритм нахождения порядка $\pi^{opt} = (x_1,x_2,\ldots x_N)$, $\{x_1,x_2,\ldots x_N\}=\{1,2,\ldots N\}$, при котором реконструкция всего комплекса завершится за минимальное время, или найти хотя бы ε-оптимальное решение.

В качестве вышеозначенного комплекса можно рассматривать военно-промышленный блок экономики, предприятия определенной отрасли, как в микро-, так и в макро масштабе. При этом можно рассматривать как уже построенные, так и планируемые предприятия. Идеальная же ситуация, когда речь идет о модернизации сети торговых предприятий, неэффективно работающих «по старинке» и упускающих тем самым прибыль. Именно здесь реконструкцию можно с хорошей точностью считать безостановочной, т. к. смена торгового оборудования и текущий ремонт не занимают значительного времени. Вообще же задача имеет универсальный характер, и ее решение определяет стратегию поэтапного перехода некоторой сложной системы на новый качественный уровень за минимальное время за счет внутренних коллективно накапливаемых ресурсов в условиях их процентного роста либо наоборот дисконтирования.

III. Задача в прямом и обратном времени.

Пусть на момент времени t от начала накопления средств на реконструкцию i-го предприятия суммарный темп отчислений в фонд составляет величину z стоимостных единиц в единицу времени. За бесконечно малый промежуток dt в общий фонд будет перечислена величина dM= zdt. Накопление закончится по истечении временного интервала τ_i, и непрерывное начисление процентов увеличит dM до величины $z dt \exp[\alpha(\tau_i - t]$. Проинтегрировав по времени в пределах от 0 до τ_i и, приравняв величину интеграла значению A_i, получим следующее выражение для длины интервала накопления —

$$\int_0^{\tau_i} z dt e^{\alpha(\tau_i - t)} = \frac{z}{\alpha}(e^{\alpha\tau_i} - 1) = A_i \Rightarrow \tau_i = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln(1 + \frac{\alpha A_i}{z}).$$

По истечении этого времени величина z скачком возрастет на w_i, и время реконструкции следующего j-го предприятия составит $\tau_j = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln(1 + \frac{\alpha A_j}{z + w_i})$, и т.д. В результате получим выражение для целевой функции и формулировку задачи в *прямом времени*:

$$T(x_1, x_2, \ldots x_N) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \ln\left(1 + \frac{\alpha A(x_1)}{z_0}\right) + \ln\left(1 + \frac{\alpha A(x_2)}{z_0 + w(x_1)}\right) + \\ + \ldots + \ln\left(1 + \frac{\alpha A(x_N)}{z_0 + w(x_1) + \ldots + w(x_{N-1})}\right) \end{array} \right\}. \qquad (1)$$

$$T(x_1, x_2, \ldots x_N) \to \min, \quad \{x_1, x_2, \ldots x_N\} = \{1, 2, \ldots N\}$$

(Здесь и в дальнейшем, во избежание многоуровневых индексов рассматриваем величины τ_i, A_i и w_i как функции номера предприятия x_i — $\tau(x_i), A(x_i), w(x_i)$.) Величина z_0 — суммарный темп отчислений в момент $t = 0$ принятия решения.

Обозначим $W=w_1+w_2+,\ldots+w_N$ величину полного реконструкционного прироста темпов отчислений, и $z_2 = z_0+W$ — проектный темп отчислений, уже прекратившихся, т.к. цель будет достигнута в момент реконструкции последнего из предприятий. По аналогии с расчетом поздних сроков в сетевом планировании рассмотрим процесс реконструкции также и в *обратном времени*. Тогда реконструкция предприятия x_i после накопления комплексом инвестиций в размере $A(x_i)$ будет выглядеть как *демонтаж*, высвобождение и убывание в обратном времени этих средств. Это убывание происходит по тому же закону, что и, например, убывание золотого содержания равномерно расходуемых средств при инфляции с показателем, равным проценту α.

Из (1) легко получается формула для времени полного «демонтажа» комплекса —

$$
\begin{aligned}
&T_{rev}(x_N, x_{N-1}, \ldots x_1) = \\
&= \frac{1}{\alpha}\left\{\ln\left(1 + \frac{\alpha A(x_N)}{z_2 - w(x_N)}\right) + \ln\left(1 + \frac{\alpha A(x_{N-1})}{z_2 - w(x_N) - w(x_{N-1})}\right) + \ldots\right. \\
&\left. + \ln\left(1 + \frac{\alpha A(x_1)}{z_2 - w(x_N) - w(x_{N-1}) - \ldots - w(x_1)}\right)\right\} \to \\
&\to \min,\ \{x_1, x_2, \ldots x_N\} = \{1, 2, \ldots N\},
\end{aligned} \tag{2}
$$

Оптимальное решение (2) в обратном порядке совпадает с решением $\pi^{opt} = (x_1, x_2, \ldots x_N)$ в прямом времени (1), потому далее обе задачи будут рассматриваться параллельно.

IV. Функции неглобального приоритета.

Пусть на момент начала накоплений инвестиций для реконструкции пары соседствующих в очереди предприятий x_i и x_{i+1} суммарные темпы отчислений составляют величину $z = z_0 + w(x_1) + w(x_2) + \ldots + w(x_{i-1})$. По аналогии с [8] установим *локальную* оптимальную очередность. Порядок (x_i, x_j) предпочтительней (x_j, x_i), если $T(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_N) \le T(x_1, \ldots, x_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i, x_{i+2}, \ldots, x_N)$. Это равносильно неравенству

$$
\left(1 + \frac{\alpha A(x_i)}{z}\right)\left(1 + \frac{\alpha A(x_{i+1})}{z + w(x_i)}\right) \le \left(1 + \frac{\alpha A(x_{i+1})}{z}\right)\left(1 + \frac{\alpha A(x_i)}{z + w(x_{i+1})}\right) \tag{3}
$$

После перемножения, вычитания из обеих частей единицы и сокращения на положительный коэффициент дисконтирования α получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{A(x_i)}{z} + \frac{A(x_{i+1})}{z + w(x_i)} + \frac{\alpha A(x_i) A(x_{i+1})}{z(z + w(x_i))} \le \\
&\le \frac{A(x_{i+1})}{z} + \frac{A(x_i)}{z + w(x_{i+1})} + \frac{\alpha A(x_i) A(x_{i+1})}{z(z + w(x_{i+1}))}
\end{aligned} \tag{4}
$$

После деления обеих частей на $A(x_i)A(x_j)$ каждое слагаемое в неравенстве зависит только от номера одного предприятия —

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{zA(x_{i+1})} + \frac{1}{A(x_i)(z + w(x_i))} + \frac{\alpha}{z(z + w(x_i))} \le \\
&\le \frac{1}{zA(x_i)} + \frac{1}{A(x_{i+1})(z + w(x_{i+1}))} + \frac{\alpha}{z(z + w(x_{i+1}))}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Группировка членов и несложные преобразования преобразуют (5) в неравенство

$$\frac{1}{\varphi(x_{i+1},z)}=\frac{w(x_{i+1})/A(x_{i+1})-\alpha}{w(x_{i+1})+z}\le\frac{w(x_i)/A(x_i)-\alpha}{w(x_i)+z}=\frac{1}{\varphi(x_i,z)} \qquad (6)$$

задающее линейные по *z* функции *неглобального приоритета* (упорядочивающие потенциалы) *в прямом времени* —

$$\varphi(x_k,z)=\frac{z+w(x_k)}{w(x_k)/A(x_k)-\alpha} \qquad (7)$$

Знаменатели в средних членах (6) всегда положительны, а числители, они же знаменатели (7) потенциально принимают разные знаки и даже обращаются в нуль. Поэтому все предприятия разбиваются на три класса в зависимости от знака потенциала.

Класс приоритетности I объединяет предприятия с $\varphi(x_i,z)>0$. Для них (6) эквивалентно неравенству $\varphi(x_i,z)\le\varphi(x_{i+1},z)$.

В классе II объединены предприятия с $w(x_i)/A(x_i)-\alpha=0$. Согласно (6) любое из них реконструируется после любого предприятия класса I.

В классе III все потенциалы $\varphi(x_i,z)<0$, и предприятия реконструируется в последнюю очередь в соответствие с убыванием абсолютных величин (7).

Отметим, что суммарное время реконструкции K≤N предприятий класса II не зависит от порядка. Время реконструкции всех его K≤N предприятий равно с учетом $\alpha A(x_i)=w(x_i)$

$$T_{II}=\frac{1}{\alpha}\cdot\ln\left\{\begin{aligned}&\left(1+\frac{w(x_1^{II})}{z}\right)\left(1+\frac{w(x_2^{II})}{z+w(x_1^{II})}\right)\ldots\times\\&\times\left(1+\frac{w(x_K^{II})}{z+w(x_1^{II})+w(x_2^{II})+\ldots+w(x_{K-1}^{II})}\right)\end{aligned}\right\}= \qquad (8)$$

$$=\frac{1}{\alpha}\cdot\ln\left(\frac{z+w(x_1^{II})+w(x_2^{II})+\ldots+w(x_K^{II})}{z}\right)=\underline{\frac{1}{\alpha}\cdot\ln\left(\frac{z+\Delta z}{z}\right)},$$

Оно не зависит от индивидуальных приростов $w(x_1^{II}), w(x_2^{II})\ldots w(x_K^{II})$, но только от относительного суммарного прироста $\Delta z/z$ темпов для всего класса.

Таким образом, учет начисления процентов способен качественно преобразить структуру оптимальной перестановки π^{opt}, разбив ее на три серии, соответствующие классам приоритетности. Классу II соответствует средняя серия в любом порядке. А это означает, что при K≥2 имеется как минимум K! оптимальных планов во всей задаче.

V. Потенциалы обратного времени

Рассмотрим пару соседних по очереди предприятий класса I или же класса III в обратном времени. Каждое из них характеризуется потенциалом, определяемым по формуле (7). Пусть $z' = z + w(x_i) + w(x_{i+1})$ темпы на момент «начала демонтажа» этой пары. В обратном времени оптимальность порядка (x_{i+1}, x_i) означает оптимальность порядка (x_i, x_{i+1}) в прямом. Заменив в (7) $z = z' - w(x_i) - w(x_{i+1})$, получим выражение

$$\begin{gathered}\frac{z'\text{-}w(x_{i+1})}{w(x_i)/A(x_i)-\alpha} \le \frac{z'\text{-}w(x_i)}{w(x_{i+1})/A(x_{i+1})-\alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(z'\text{-}w(x_{i+1})\right)\left(\frac{w(x_{i+1})}{A(x_{i+1})}-\alpha\right) \le \left(z'\text{-}w(x_i)\right)\left(\frac{w(x_i)}{A(x_i)}-\alpha\right)\end{gathered} \tag{9}$$

для функций приоритета $\psi(x_j, z') = \left(z'\text{-}w(x_i)\right)\left(w(x_i)/A(x_i)-\alpha\right)$ — *потенциалов обратного* времени, также линейных по z', но с обратным значением коэффициента. То предприятие из выбранной пары реконструируется в прямом времени вторым, у которого при данном значении *z* потенциал обратной хронологии ниже. При этом нули у обоих типов потенциалов для одного и того же предприятия отличаются лишь знаком. Дать наглядную экономическую интерпретацию этим потенциалам в случае произвольного α непросто. Что касается $\alpha = 0$ [8], то потенциал

$$\varphi(x_i, z) = \frac{z + w(x_i)}{w(x_i)/A(x_i)} = A(x_i) : \left(\frac{w(x_i)}{z + w(x_i)}\right)$$

можно интерпретировать как удельные инвестиции в расчете на единичную долю прироста темпов отчислений z, но не от достигнутых на момент начала реконструкции, а от достигаемых после нее.

VI. Оценочная задача. Критерий оптимальности.

Известный критерий оптимальности для задач дискретной оптимизации (см. [2]), в том числе оптимизации на P_N заключается в нахождении конечного расширения $R=\{r_1, r_2, \ldots r_M\} \supseteq P_N$ и построения на нем миноранты $Q(r_i) \le T(r_i)$ для целевой функции. Если возможно построение алгоритма Ω пошагового упорядочения элементов $r_i \in R$ по неубыванию миноранты Q, и на некотором шаге k пересечение $\{r_1, r_2, ... r_k\} \cap P_N = G_k \subset P_N$ не пусто, а $Q(r_k) \ge \min(T(\pi) | \pi \in G_k\} = T(\pi^*)$, то перестановка π^* оптимальна.

В нашем случае в качестве такого расширения берется само множество P_N, и задача рассматривается в обратном времени. Величины $w(x_i)/z_2$ считаются малыми, а в качестве миноранты для целевой функции T_{rev} (2) можно взять первые два члена ее ряда Тейлора —

$$Q(x_N, x_{N-1}, ... x_1) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{N} \ln[1 + \frac{\alpha A_i}{z_2}] +$$

$$+ \frac{1}{z_2^2} \big(B(x_N) w(x_N) + B(x_{N-1})[w(x_{N-1}) + w(x_N)] + \qquad (10)$$

$$... + B(x_1)[w(x_1) + w(x_2) + ... w(x_N)]\big), \quad B(x_i) = \frac{A(x_i)}{1 + \alpha A(x_i)/z_2},$$

Первый член —нулевое приближение по $w(x_i)$ — инвариантен относительно любой перестановки индексов и он равен времени «деконструкции» комплекса без уменьшения темпов отчисления z_2, линейные по $w(x_i)$ слагаемые — дифференциал T_{rev}.

Строгое неравенство $Q(x_N, x_{N-1}, ... x_1) < T_{rev}(x_N, x_{N-1}, ... x_1)$ при хотя бы одном отличном от нуля $w(x_i) > 0$ объясняется тем, что каждое слагаемое $\ln\left(1 + \frac{\alpha A(x_{N-1})}{z_2 - w(x_N) - w(x_{N-1}) - ... w(x_{N-k})}\right)$ в фигурных скобках (2) является вогнутой функцией от $w = w(x_N) + w(x_{N-1}) + ... + w(x_{N-k})$, $0 < w < z_2$, приращение которой строго больше дифференциала.

(Кроме того, разложение (2) по степеням $w(x_i)/z_1$ можно осуществлять вблизи значения $z_1 = (z_0 + z_2)/2$, либо иного среднего в зависимости от масштабов различия z_0 и z_2.)

Задача минимизации выражения в круглых скобках (10) имеет красивую геометрическую интерпретацию. Если принять исправленные объемы инвестиций B_i за высоты ступеней некоторой двумерной лестницы, а w_i — за их ширины, то выражение есть площадь S такой лестницы (рис.1).

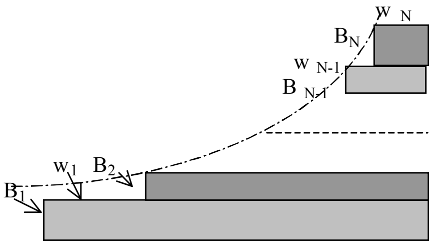

Рис.1.

Вновь применим перестановочный прием для решения оценочной задачи. Поменяем местами B_i и B_{i+1} в сумме и найдем изменение «площади» ΔS, которое на оптимальной последовательности должно быть неотрицательно —

$$\Delta S = S(i+1,i) - S(i,i+1) = \mathrm{B}(x_{i+1})\mathrm{w}(x_i) - \mathrm{B}(x_i)\mathrm{w}(x_{i+1}) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega(\mathrm{i}+1) = \frac{\mathrm{B}(x_{i+1})}{\mathrm{w}(x_{i+1})} \geq \omega(\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{B}(x_i)}{\mathrm{w}(x_i)} .$$

Оптимально то расположение, при котором ступеньки выстраиваются сверху вниз по убыванию пропорции ω(i) = высота/ширина, являющейся здесь глобальной «весовой функцией». При этом «огибающая» ступенек (штрих-пунктир) максимально вогнута.

Полученное простое решение оценочной задачи и выражение может быть использовано для приближенного определения времени и порядка реконструкции в случае небольших суммарных приростов показателей отчислений по сравнению с проектными темпами z_2.

Заметим, что при наличии нескольких классов и заранее известных динамических субинтервалах для величины z, соответствующие миноранты могут быть построены для классов I и III, и для каждого из них применен критерий оптимальности. (Для класса II точное решение и время известно — (8).)

По причине строгого неравенства для миноранты (10) динамические области для $Q(x_N, x_{N-1}, ... x_1)$ и $T_{rev}(x_N, x_{N-1}, ... x_1)$ на множестве перестановок P_N могут не пересекаться, и тогда критерий неприменим. В таком случае поиск оптимального упорядочения сведется к нахождению и описанию множества F всех *допустимых* перестановок $\pi^{доп} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, обладающих свойством: на момент z реконструкции любой пары (x_j, x_{j+1}) потенциал $\varphi(x_{j+1}, z)$ не ниже $\varphi(x_j, z)$. Среди этого множества обязательно будет хотя бы одна оптимальная перестановка $\pi^{опт}$. Заметим, что даже невозрастание целевой функции при перемене местами любых двух предприятий, а не только соседних по очереди, в последовательности $\pi^{доп}$ *a priori* не означает, что перестановка в такой задаче оптимальна: верно лишь в обратную сторону. Потому, во множестве F должно быть не пустое подмножество таких *квазиоптимальных* перестановок, аналогичных по свойствам локальным экстремумам аналитической функции.

Исследование допустимой перестановки обязательно включает в себя проверку на такую квазиоптимальность, подразумевающую инверсии любых двух не соседних предприятий. Таких парных перестановок в $\pi^{доп}$ будет не более $N(N-3)/2$. «Не более» обусловлено тем, что, как будет показано ниже, некоторые предприятия принципиально не могут быть переставлены в начало либо конец очереди. Проверка найденной перестановки $\pi^{доп}$ на квазиоптимальность позволит потенциально дважды улучшить допустимый план: один раз вследствие перехода к улучшенной последовательности, возможно не являющейся допустимой, второй — как результат устранения конфликтов переставленных предприятий со своими новыми соседями.

VII. Декомпозиция задачи.

Возможное разбиение на классы упростит задачу и сведет ее к нахождению таких перестановок $\pi^c = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ внутри каждого класса, кроме класса II, где все перестановки допустимые. Покажем ниже, что и эта задача может быть редуцирована к задаче меньшей размерности.

Прежде отметим, что нет необходимости рассматривать потенциалы во всей области изменения величин *z* и *z'*, соответственно, всего рассматриваемого класса, а только там, где они реально способны определять очередность. Обозначим W^c, c =I, III прирост темпов отчислений в результате реконструкции всех предприятий класса, $z_2=z_0+W^c$— проектные темпы отчислений для каждого из классов. (Для каждого класса свои величины z_2 и z_0.)

Очевидно, что функцию $\varphi(x_j, z)$ нет смысла рассматривать вне отрезка $[z_0,z_2-w(x_j)]$, соответственно, $\psi(x_j, z')$ — вне $[z_0+w(x_j),z_2]$. Найдем точки пересечения $Z(x_k,x_j)$ (для $\varphi(x_j, z)$) и $Z'(x_k,x_j)$ (для $\psi(x_j, z')$) у обоих типов функций приоритета у предприятий k и j. Обозначим по-прежнему коэффициенты линейности в $\psi(x_j, z')$ и $\psi(x_k, z')$ как $\beta_j = w(x_j)/A(x_j) - \alpha$ и $\beta_k = w(x_k)/A(x_k) - \alpha$. Приравняв пары $\varphi(x_j, z)$ и $\varphi(x_k, z)$, $\psi(x_j, z')$ и $\psi(x_k, z')$, получим

$$Z(x_k, x_j) = \frac{\beta_j w(x_k) - \beta_k w(x_j)}{\beta_j - \beta_k},\ Z'(x_k, x_j) = \\ = Z(x_k, x_j) + w(x_j) + w(x_k) \qquad (11)$$

Из (11) очевидно: если для $\varphi(x_j, z)$ и $\varphi(x_k, z)$ точка $Z(x_k,x_j) \geq z_0 + W^{(c)} - [w(x_k) + w(x_j)]$, то для $\psi(x_j, z')$ и $\psi(x_k, z')$ $Z'(x_k,x_j)$ выходит за $z_2=z_0+W^{(c)}$ — верхнюю границу динамического интервала. То есть, имеет место доминирование потенциала ($\psi(x_j, z')$) одного из предприятий над потенциалом ($\psi(x_k, z')$) другого, и какова бы ни была оптимальная очередность для других предприятий класса, в прямом времени очередь реконструкции предприятия x_j наступит раньше, чем у x_k.

Таким образом, в начальном приближении потенциал $\varphi(x_j, z)$ *прямой хронологии* достаточно рассматривать в пределах рекурсивно определяемого отрезка

$$[z_0,z_2-w(x_j)-a_j],\ a_j = \min\{w(x_k)|\ k\neq j,\ Z(x_k,x_j)\in(z_0,z_2-w(x_j)-a_j)\} \qquad (12)$$

Соответственно, потенциалы *обратной хронологии* достаточно рассматривать на отрезке

$$[z_0+w(x_j)+b_j,z_2],b_j = \min\{w(x_k)|\ k\neq j,Z(x_k,x_j)\in(z_0+w(x_j)+b_j,z_2)\}] \qquad (12')$$

то есть проектных темпов отчислений z_2 за вычетом собственного прироста $w(x_j)$ и минимального прироста $w(x_k)$ для того из предприятий x_k, потенциал $\varphi(x_k, z)$ которого имеет точку пересечения с $\varphi(x_j, z)$ на интервале с теми же границами. Неучет в $\min\{w(x_k)|k\neq j\}$ тех номеров k, для которых не выполняется условие $Z(x_k,x_j)\in(z_0,z_2-w(x_j)-w(x_k))$ обусловлен тем, что график потенциала $\psi(x_k, z')$ обратного времени пересечется с графиком $\psi(x_k, z')$ за границей динамического интервала для z'.

Такое ограничение областей рассмотрения упорядочивающих потенциалов не является окончательным — далее можно рассматривать их на отрезках типа

$[z_0,z_2-w(x_j)-a_j]$, $a_j = \min\{w(x_k)+ w(x_l)|\ k\neq l\neq j,$

$Z(x_l,x_j),Z(x_k,x_j)\in(z_0,z_2-w(x_j)-a_j)\}$

для того, чтобы исключить неоптимальные последние тройки предприятий и т.д., но все это требует дополнительного перебора вариантов. Потому, остановимся пока на границах, задаваемых (12)—(12').

Уточним определение доминирования потенциала $\varphi(x_j, z)$ над потенциалом $\varphi(x_k, z)$ как отсутствие точки пересечения в общей части их областей, определяемых по формуле (12). Такое определение означает и отсутствие пересечений на интервале $(z_0,z_2-w(x_j)-w(x_k))$ и выполнение там неравенства $\varphi(x_j, z) > \varphi(x_k, z)$. Аналогично и для потенциалов обратной хронологии: если $\psi(x_k, z')$ доминирует над $\psi(x_j, z')$, то $\psi(x_k, z') > \psi(x_j, z')$ на интервале $(z_0+w(x_j)+w(x_k), z_2)$.

В оптимальной последовательности предприятие с доминирующим потенциалом $\varphi(x_j, z)$ будет реконструироваться после предприятия с доминируемым потенциалом $\varphi(x_k, z)$. И, наоборот, предприятие с доминирующим $\psi(x_k, z')$ — до предприятия с $\psi(x_j, z')$. Между ними могут располагаться другие предприятия, как связанные условиями доминирования между собой и с рассматриваемой парой, так и не связанные.

Отношение доминирования одних потенциалов над другими может разбить все предприятия класса на *группы* (связки) предприятий, также связанные этими отношениями. То есть, любое предприятие в доминирующей группе доминирует над любым предприятием в группе, над которой доминирует первая (Рис. 2). Это означает, что потенциалы групп разделены в соответствующей динамической области. В свою очередь в любой связке могут быть пары потенциалов, связанные отношением доминирования — $\varphi(x_n, z)$ и $\varphi(x_m, z)$ в группе I.

Можно показать, что возможное разбиение N^c>>1 предприятий класса на m групп длинами $n_1, n_2, ... n_m$ уменьшает число перебираемых вариантов в классе с $(N^c-1)\times(N^c-1)!$ до величины, не большей $(n_1-\Delta_1)\times(n_1-1)!+(n_2-\Delta_2)\times(n_2-1)!+...+(n_m-1)\times(n_m-\Delta_m)!$, где $\Delta_j=2$ для $n_j>2$, $\Delta_j=1$, $n_j = 2$. Уменьшение общего числа всех перестановок внутри группы с $n_j!$ до $(n_j-1)\times(nj-1)!$ обусловлено тем, что предприятие, потенциал $\varphi(x_k, z = z_{нач.})$ которого на момент начала реконструкции группы максимален, не может быть в группе первым. Не может также быть последним и предприятие с максимальным на момент «начала деконструкции» группы потенциалом $\psi(x_j, z' = z'_{кон.})$. Также, число вариантов снижается в разы за счет потенциального наличия в связке пар потенциалов, связанных доминированием. Потому реальное число перебираемых вариантов в группе i с $n_i>2$ предприятиями не превышает $(n_i-1)\times(n_i-1)!- [(n_i-1)\times(n_i-1)!]:(n_i-1) = (n_i-2)\times(n_i-1)!$.

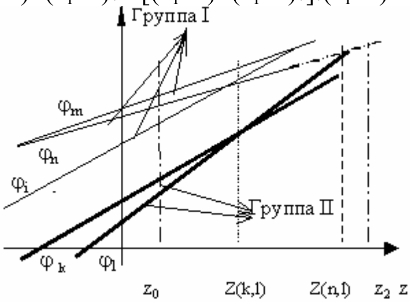

Рис. 2.

Разбиение класса на группы подразделяет его динамический диапазон $[z_0^c, z_2^c]$ на соответствующие поддиапазоны: $z \in [z_0^g, z_2^g]$, g — номер подгруппы в классе c = I или III. И далее для групп справедливо все вышесказанное о классах. Аналогично (12), (12’) уточняются границы динамических интервалов для потенциалов обоих типов и понятие доминирования уже в группе. Возможно также разбиение группы на *группы 2-го уровня*, а их в свою очередь на группы 3-го и т.д. Заметим, что верхняя и нижняя границы динамических интервалов для $\varphi(x_j, z)$ (12) и $\psi(x_j, z')$ (12’) для групп любого уровня могут быть скорректированы при наличии в соответствующей связке (группе) одного или нескольких потенциалов $\varphi(x_k, z)/\psi(x_k, z)$, доминирующих над $\varphi(x_j, z)/\psi(x_j, z')$. В этом случае их показатели прироста $w(x_k)$ должны быть прибавлены в соответствующие границы.

Итак, возможное наличие *групп доминирования* внутри класса и подгрупп внутри группы существенно снижает объем перебираемых вариантов, так как проблема сводится к последовательному исследованию $\leq(n_j-\Delta_j)\times(n_j-1)!$ перестановок связки n_j потенциалов соответствующего уровня и нахождению там оптимальных. Последнее может осуществляться как простым перебором для относительно небольших значений n_j, так и с использованием оценочной задачи (10) для упорядочиваемой связки (см. далее), или же некоторым другим, чисто эвристическим путем. Предлагаемый способ нахождения оптимальной последовательности соответствует методу ветвей и границ. Однако, в худшем случае все $N>>1$ предприятий могут принадлежать одному классу и не разбиваться на группы, т.е. образовывать нераспадающуюся связку. Тогда возможно нахождение ε-оптимального решения на одной из так называемых *гарантированных* допустимых последовательностей (см. далее). Возможно также нахождение оптимальной серии для оценочной функции Q (10) и пересчет ее для истинной функции T_{rev}(20). (Численный расчет, проделанный автором для такой связки из N=8 предприятий показал, что различия в значениях целевой функции составляют несколько %%).

VIII. Метод ветвей и границ. Пожирающий (greedy) алгоритм.

Отметим прежде, что ε-оптимальное решение проблемы можно найти при помощи так называемого *пожирающего* (greedy) алгоритма (см. например в [9]), реализация которого здесь будет первым шагом метода ветвей и границ. Суть greedy-алгоритма заключается в том, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_N$ упорядочивают по некоторому показателю и поочередно фиксируют максимальное/минимальное их значение или же аргумент такого значения некоторой функции $f(x_i, y)$, где y — параметр. Фактически он уже использовался при решении оценочной задачи (10).

Так, предварительно предприятия упорядочиваются по значению показателя $\varphi(x_i, z_0)$, и фиксируется номер $x_1 = \arg\min \varphi(x_j, z_0)$. Затем предприятие с таким номером исключается из рассмотрения, а оставшиеся упорядочиваются по величине $\varphi(x_j, z_0 + w(x_1))$, и выбирается $x_2 = \arg\min \varphi(x_j, z_0 + w(x_1))$. Оно также исключается, и выбирается $x_3 = \arg\min \varphi(x_j, z_0 + w(x_1) + w(x_2))$ и т. д. В результате получается гарантированная допустимая перестановка $\pi^{\text{доп}}$. То же можно реализовать и в задаче в обратном времени (2), если последнее предприятие x_m в полученной ранее допустимой перестановке не обладает максимальным потенциалом, т. е. $\psi(x_m, z_2) \neq \max_i \psi(x_i, z_2)$.

Наименьшее полученное значение целевой функции записывается как рекорд, и оно может быть использовано далее в методе ветвей и границ. Следующим шагом этого метода будет выбор в качестве первоочередного объекта предприятия со вторым по величине показателем $\varphi(x_i, z_0)$. В качестве второго — предприятие с наименьшим потенциалом $\varphi(x_j, z_0 + w(x_1))$ среди тех, потенциал которых $\varphi(x_i, z_0) \geq \varphi(x_1, z_0)$. Третьим будет, соответственно, предприятие с наименьшим $\varphi(x_j, z_0 + w(x_1) + w(x_2))$ при условии, что $\varphi(x_j, z_0 + w(x_1) + w(x_2))$, и т. д. (Выбранные номера также исключаются из дальнейшего рассмотрения.) Однако здесь нет гарантии в благополучном завершении процесса, т. к. на каком-то не последнем этапе соответствующее множество выбора может оказаться пустым. Так, для случая непересекающихся на динамическом интервале потенциалов пустое множество возникнет на предпоследнем этапе. Но, если процесс дойдет до конца, то мы получим еще одну допустимую перестановку, и возможно, новый рекорд целевой функции.

Пусть множество выбора оказалось пустым после серии (x_1, x_2, … x_{s-1}, $\mathbf{x}_s$, $\mathbf{x}_{s+1}$). Тогда можно утверждать, что любая последовательность, начинающаяся серией в любом порядке предприятий x_1, x_2, … x_{s-1} и за ними $\mathbf{x}_s$ и $\mathbf{x}_{s+1}$— ($\{x_1, x_2, \ldots x_{s-1}\}$, $\mathbf{x}_s$, $\mathbf{x}_{s+1}$,…) не будет оптимальной. Таким образом, чем длиннее серия до возникновения пустого множества выбора, тем больший массив последовательностей отсекается как неперспективные. Далее можно варьировать номер первого предприятия x_1, исключая только предприятие с наибольшим начальным потенциалом, и отсекать еще и еще неперспективные начала и продолжения. (Аналогично и в задаче (2), если для последнего предприятия x_l в получаемой допустимой перестановке $\psi(x_l, z_2) \neq \max \psi(x_i, z_2)$.)

В некоторых частных случаях уже первый шаг — пожирающий алгоритм сразу даст точное решение задачи. В частности тогда, когда все точки пересечения $Z(x_k,x_j) \in (z_0, z_2+\min\{w(x_j)\})$. (При нахождении минимума исключается предприятие с наибольшим начальным $\varphi(x_i, z_0)$.) Или, наоборот, когда все $Z'(x_k,x_j)$ лежат вблизи правого конца динамического интервала. В схожих случаях метод ветвей и границ даст оптимальное решение после относительно небольшого перебора вариантов.

XI. Влияние инфляции

Пусть величины z, A_i и w_i выражаются в твердой валюте, но физически все платежи и поступления осуществляются в валюте, подверженной инфляции с показателем λ (год$^{-1}$), по текущему курсу. (Автор не объясняет, а лишь констатирует тот факт, что далеко не все корпорации, фирмы и прочие экономические субъекты переводят свои прибыли *in situ* в твердую валюту, что возможно и предотвращает ажиотажный спрос на нее и непомерное повышение курса.) В этом случае на фоне непрерывного роста номинальной величины вклада с показателем α, происходит его обесценивание с темпом λ. От их разности $\delta = \alpha - \lambda$ зависит темп роста необходимого валютного накопления A_i. Время такого накопления для i –го предприятия составит теперь

$\tau_i = \frac{1}{\delta} \cdot \ln\left(1 + \frac{A_i \delta}{z}\right)$. Для $\delta>0$ остаются в силе все выкладки и выводы, лишь с заменой α на δ. Случай $\delta = 0$ фактически изучается в [8]. Следовательно, решение проблемы осуществляется по тому же алгоритму, что и при $\lambda = 0$.

Нетрудно видеть, что, если $\delta<0$, но при всех значениях z из динамического интервала и для всех i = 1,2,...N выражения под знаком логарифма положительны, то выкладки, аналогичные (3) — (6), приводят практически к тем же результатам, с той разницей, что все предприятия будут принадлежать здесь одному классу I положительных потенциалов.

Иная ситуация при $\delta<0$, если для определенных z и i величины $1 + \frac{A_i \delta}{z} \le 0$. Тогда алгоритм претерпевает изменение: при текущем значении z в качестве претендентов на следующую реконструкцию «физически» могут рассматриваться лишь те предприятия, для которых выражение для τ_i имеет смысл, т. е. $1 + \frac{A_i \delta}{z} > 0$. Здесь возможна ситуация, когда задача не имеет решения изначально, или же после нескольких или даже одного неверно сделанного шага. Таким шагом может оказаться «самый первый» шаг, и тогда состязание на перегонки с инфляцией будет безнадежно проиграно: комплекс не модернизируется целиком никогда. Однако, вычислительный объем алгоритма при этой и подобной ситуациях уменьшается, и чем более напряжена ситуация, тем значительней это уменьшение. И совсем не потребуется никакой алгоритм, когда на каждом шаге имеется лишь одно допускающее реконструкцию предприятие.

Литература.

1. *Танаев В. С., Шкурба В. В.*, Введение в теорию расписаний.— М.: Наука, 1975.— 256 с.
2. *Емеличев В. А., Комлик В. И.*, Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации,—М.: Наука, 1981—208 с.
3. *Кристофидес Н*, Теория графов. Алгоритмический под-

ход.—М.: Мир, 1978 — 405 с.
4. *Пападимитриоу Х., Стайглиц К.*, Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. Пер. с англ.—М.:Мир, 1985.— 510 с.
5. *Уздемир А. П.*, Динамические целочисленные задачи оптимизации в экономике.— М.: Физматлит,— 1995,—288 с.
6. *Хачатуров В. Р., Веселовский В. Е., Злотов А. В. и др.* Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности,— М.: Наука, 2000,— 360 с.
7. *Г. Рихтер*, Динамические задачи дискретной оптимизации, Пер. с нем.— Радио и связь, 1985,— 136 с.
8. *Чистяков В. В., Оликевич А. А.*, Алгоритм определения оптимальной очередности реконструкции n>>1 предприятий комплекса по критерию быстродействия», Сборник трудов 8-й межд. конф. «Математика. Компьютер. Образование», Москва, МГУ, 2001 г, ч.1, сс. 204-207.
9. *А. А. Заславский, С. С. Лебедев*, Метод узловых векторов целочисленного программирования. I. Общая задача частично целочисленного программирования с неотрицательными коэффициентами./ Препринт # WP/2000/094.— М.: ЦЭМИ РАН, 2000-81 с.