ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Булычева Ю.В.

(Астрахань)

Данная статья затрагивает проблему использования графических моделей пространственных фигур при обучении геометрии. Построение и использование графических моделей пространственной фигуры в различных ракурсах при решении задач создает дидактическую основу для развития пространственного воображения учащихся. При изучении планиметрического материала графическая модель способствует формированию навыков изображения плоских фигур как элементов пространственных. В стереометрических задачах графическая модель устанавливает связь между пространственной моделью фигуры и ее разверткой на плоскость.

USE OF GRAPHIC MODELS OF SPATIAL FIGURES UNDER SOLUTION OF GEOMETRICAL PROBLEMS

Bulycheva J.V.

(Astrakhan)

This paper touches upon the problem of usage of graphic models of spatial figures under training geometry. The construction and usage of graphic models of spatial figures in different foreshortenings create didactic foundation for the development of pupils' space imagination. Under study of planimetry graphic model forms the skills of graphical representation of plane figures as elements of spatial ones. In stereometry graphic model connects the spatial model of figure with its development on plane.

Социально-экономические изменения в стране, происходящие в последние годы, повлекли за собой смену приоритетов в сознании людей. В современном обществе востребованы люди с нестандартным творческим стилем мышления, одним из признаков которого может служить развитое пространственное воображение.

Развитию пространственных представлений учащихся, пространственного воображения способствует взаимосвязанное изучение на протяжении всех лет обучения геометрии свойств плоских и объемных фигур, решение задач, синтезирующих планиметрический и стереометрический материал.

Чертежу пространственной фигуры принадлежит первостепенная роль в развитии выше названных качеств личности. Именно графическая модель объемного тела является тем средством, с помощью которого человек может мысленно увидеть его как реальный объект. С другой стороны, при зрительном восприятии пространственного объекта информация поступает не от всех частей модели. Невидимые элементы достраиваются на чертеже на основе хранящихся в памяти наблюдателя образов. Поэтому построение и использование графических моделей пространственной фигуры в различных ракурсах при решении задач создает дидактическую основу для развития пространственного воображения учащихся.

К сожалению, при решении задач планиметрии у учащихся складывается мнение, что плоскость изображений фигуры всегда перпендикулярна лучу зрения человека. Традиционное изображение плоских фигур приводит к формированию неправильных представлений учащихся о положении фигуры в пространстве как о ее существенном свойстве, к однобокости восприятия учащимися плоских фигур только как самостоятельных геометрических единиц, а не как составляющих элементов объемных тел. Необходимо по возможности плоские фигуры изучать и изображать расположенными различным образом в пространстве, включенными в изображения пространственных объектов. Это поможет учащимся в дальнейшем строить грамотные изображения пространственных фигур в условиях частой смены ориентации в геометрическом пространстве.

Существует много задач различных типов пропедевтического характера, способствующих формированию навыков изображения плоских фигур как элементов пространственных. Среди них выделяются следующие:

I. Задачи на идентификацию различных изображений одного и того же плоского объекта, включенного в изображение реального пространственного объекта (столешницы, бруска и т.д.).

II. Задачи на поиск изображения из нескольких данных для предъявленного плоского объекта.

III. Задачи на оценивание формы и размеров плоской фигуры.

IV. Задачи с использованием изображений пересечения заданных плоских фигур.

Приведем пример задачи второго типа.

Задача 1. На поверхности столешницы, разбитой на равные квадраты, изображены треугольники и четырехугольники. Найдите равнобедренные и прямоугольные треугольники. Найдите четырехугольники, имеющие две параллельные противоположные стороны.

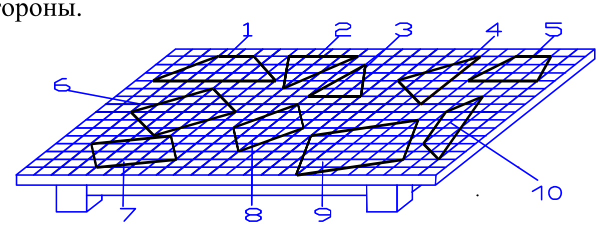

Рис. 1.

Вначале учителю необходимо попросить учащихся самостоятельно найти требуемые изображения, ориентируясь только на личное зрительное восприятие объектов, и зафиксировать выводы в тетрадях.

Для решения данной задачи от учащихся не требуется проведения сложных доказательств. В своих рассуждениях они используют результаты тривиального измерения длин сторон (подсчет квадратов) и минимум теории (определение равнобедренного треугольника, параллелограмма, признаки параллелограмма, теорему, обратную теореме Пифагора).

Решение. Треугольник под номером 2 является равнобедренным по определению. Две его стороны равны как диагонали равных прямоугольников размерами 2×4. Треугольник под номером 4 - равнобедренный, его стороны равны как диагонали прямоугольников размерами 3×3. Этот треугольник является также прямоугольным по теореме, обратной теореме Пифагора. Гипотенуза имеет длину 6, катеты -$3\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$ и т. д.

После решения данной задачи необходимо сравнить результаты зрительного восприятия заданных плоских объектов и результаты проведенных исследований. Это сравнение поможет учащимся ответить на вопросы учителя и сделать необходимые выводы. Вопросы могут быть такими:

1). Можем ли мы только зрительно выбрать изображения требуемых фигур? (Можем, но не все изображения. Можем выбрать только изображения четырехугольников с параллельными противоположными сторонами).

2). Что может происходить с изображениями плоских фигур в пространстве? (Они могут искажаться).

3). Что именно искажается при изображении плоских фигур в пространстве? (Форма и размеры фигур, т.е. длины отрезков и величины углов).

4). Что не искажается при изображении? (Параллельность отрезков).

Вывод о свойствах плоских фигур, сохраняющихся и не сохраняющихся при изображении в пространстве, учащиеся делают самостоятельно.

Все перечисленные типы задач пригодны для любого уровня изучения геометрии. Их можно упрощать, разбивая поверхность многогранников на квадраты (как это сделано в предыдущей задаче), или усложнять, добавляя элементы в плоских фигурах (высоты, биссектрисы и т.д.).

Задача 2. Среди фигур, расположенных в плоскости столешницы, найти равнобедренные треугольники, прямоугольные равнобедренные треугольники. Попробуйте обосновать, какие свойства равнобедренных треугольников при изображении в пространстве сохраняются, а какие нет.

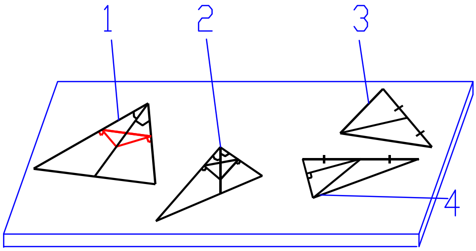

Рис. 2.

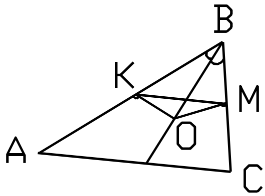

Рис. 3.

Данная задача отличается от предыдущей не только по степени сложности, но и методами решения. В ней нет разбиения поверхности пространственного тела на квадраты, поэтому те же самые рассуждения здесь неприемлемы. От учащихся потребуется аргументированное теоретическое обоснование всех выводов. Данная задача обучает правильному восприятию и построению изображений не только самой фигуры, но и ее отдельных элементов (установлению связей между этими элементами). Задачи такого типа подготавливают почву для изучения основных свойств параллельного проектирования, демонстрируют частные свойства многоугольников, сохраняющиеся при изображении в пространстве.

На уроке можно работать только с фигурой под номером 1, остальные изображения оставить для домашней работы или как материал для закрепления в классе.

Для создания проблемной ситуации учащимся предлагается измерить линейкой стороны треугольника под номером 1 и убедиться, что две никакие две его стороны не равны; установить с помощью треугольника и линейки параллельность его отрезков.

Способов доказательства того факта, что треугольник равнобедренный, может быть несколько. Вот один из них.

Доказательство. Перпендикуляры, опущенные на стороны AB и BC треугольника из произвольной точки биссектрисы угла между этими сторонами равны. Это следует из равенства прямоугольных треугольников OKB и OMB по гипотенузе и острому углу. Значит, KB = MB и ΔKBM – равнобедренный по определению. Так как KM || AC, то $\angle$CAK = $\angle$MKB и $\angle$ACM = $\angle$KMB (как соответственные при параллельных прямых; AK, СМ- секущие). Но $\angle$ МКВ = $\angle$ КМВ(углы при основании равнобедренного треугольника КВМ) $\Rightarrow$ $\angle$ САК = $\angle$ АСМ. Треугольник АВС – равнобедренный.

После решения данной задачи важно подвести учащихся к необходимым выводам о свойствах равнобедренного треугольника, которые сохраняются, и, которыми можно пренебречь при изображении в пространстве.

Выводы, которые должны сделать учащиеся:

1) При изображении равнобедренного треугольника в пространстве не сохраняются: величины углов, длины отрезков (прямой угол не выглядит прямым, все стороны имеют разные длины).

2) При изображении равнобедренного треугольника в пространстве сохраняется отношение отрезков (медиана треугольника изображается медианой); параллельность прямых (прямая, проходящая через основания перпендикуляров, опущенных на боковые стороны из произвольной точки биссектрисы угла при этих сторонах, всегда параллельна основанию).

Стереометрическая задача, приведенная в данной статье, демонстрирует необходимость применения последнего свойства равнобедренного треугольника. Знание этого свойства поможет учащимся не только грамотно построить изображение высоты пирамиды, но и предоставляет им способ решения, избегающий каких - либо дополнительных построений.

Задача 3. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник АВС с основанием АС = a. Грани пирамиды, проходящие через боковые стороны треугольника образуют с плоскостью основания угол φ. Апофема одной из этих граней делит сторону основания пирамиды 2: 3 и равна $в$. Найти объем пирамиды.

Необходимо начать решение данной задачи с анализа ее условий.

Треугольник АВС – равнобедренный, АС - его основание, а боковые грани CDB и ADB образуют с плоскостью основания равные углы. Построим линейные углы этих двугранных углов. Для этого проведем DM $\perp$ BC и DK $\perp$ AB. Соединим точки К и М с предполагаемым основанием Н высоты. Тогда НК $\perp$ АВ и НМ $\perp$ ВС (по теореме о трех перпендикулярах). Из равенства треугольников DHK и DHM (по катету и прилежащему к нему углу) следует HK=HM. Из равенства треугольников KHB и MHB следует равенство углов KBH и MBH. Значит, основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла ABC.

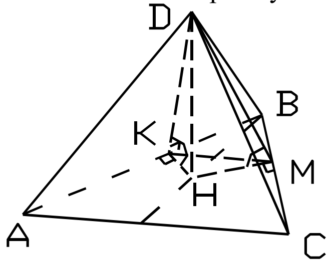

Рис. 4.

Установив, что точка H – точка биссектрисы угла между боковыми сторонами равнобедренного треугольника, учащиеся смогут не только правильно изобразить пирамиду, но и наметить путь решения задачи.

В стереометрических задачах графическая модель может использоваться как промежуточное звено при переходе к развертке этой фигуры, то есть при переходе от пространства к плоскости и наоборот. Среди этих задач можно выделить:

I. Задачи с использованием фрагментов развертки.

II. Задачи на поиск плоского изображения пространственной фигуры по данной развертке этой фигуры и наоборот.

III. Задачи на составление разверток прямых и наклонных многогранников по их графическим моделям без дополнительных исследований.

IV. Задачи на составление разверток пространственных объектов с дополнительным исследованием их графических моделей.

V. Задачи на вычисление элементов пространственной фигуры с помощью развертки.

Приведем задачу третьего типа.

Задача 4. Дана наклонная треугольная призма. Ее боковое ребро равно 5 см, а перпендикулярным сечением является треугольник со сторонами 4,5 см, 7,.5 см и 6 см. Построить развертку и пространственную модель такой призмы.

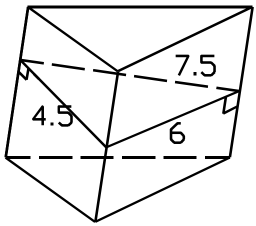

Рис. 5.

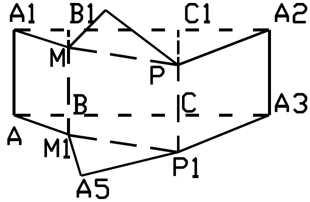

Рис. 6.

Решение. Строим развертку боковой поверхности прямой призмы со сторонами основания 4,5 см, 7,5 см и 6 см и боковым ребром 5 см (прямоугольник $AA_1A_2A_3$). На ребрах BB_1 и CC_1 произвольно выбираем точки М и Р. Отложим отрезки $MM_1=PP_1=AA_1$. Соединим точки $A_!$ и М, А и M_1, Р и A_2, P_1 и A_3, М и Р, M_1 и P_1.

$A_1MPA_2A_3P_1M_1A$ - развертка боковой поверхности призмы. С помощью циркуля строим основания – треугольники MA_4P и $M_1A_5P_1$ ($MA_4 = MA_1 = M_1A_5$, $PA_4 = PA_2 = PA_5$).

При построении пространственных моделей учащиеся получат разные по форме треугольные призмы. Это можно объяснить произволом в выборе точек М и Р, тем не менее все получившиеся призмы будут удовлетворять условиям задачи.

Перечисленные выше задачи носят практический характер и позволяют использовать планиметрические представления старшеклассников для формирования их стереометрических навыков, в том числе путем установления связей в цепочке: графическая модель пространственного объекта - развертка – пространственная модель.