ОБОБЩЕНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Аммосова Н.В., Коваленко Б.Б.

(Астрахань)

В работе уделяется внимание проблеме развития творческих качеств у учащихся основной школы. Авторы останавливаются на двух взаимосвязанных аспектах. В качестве одного из аспектов рассматривается формирование у учащихся мыслительной операции обобщения. Другой рассматриваемый аспект - ознакомление учащихся с методом математического моделирования. При этом важно сформировать у учащихся умение строить математическую модель для практической задачи и использовать ее (или несколько деформированную) для решения задач соответствующего класса. Данная проблема проиллюстрирована на примере трех классов задач.

GENERALIZATION AND MATHEMATICAL MODELING IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOL

Ammosova N.V., Kovalenko B.B.

(Astrachan)

In this paper the attention is given to the problem of development of creative abilities of school pupils. The authors consider two interconnected aspects. One of the aspects is forming of generalization thought process of pupils. The other aspect is introducing the method of mathematical modeling to pupils. It is important to form the pupils' ability to build a mathematical model and to use it for solving of the problems of a proper type. This is illustrated by three types of problems.

Умение делать обобщения и способность строить математическую модель, описывающую некий класс явлений, событий являются, на наш взгляд, взаимосвязанными; целенаправленно и систематически осуществлять их формирование следует уже у учащихся 9-11 лет, т. е. в конце начального периода обучения и в пятых-шестых классах. Пропедевтическую же работу эпизодически целесообразно проводить еще раньше.

Под обобщением понимается мыслительная операция, состоящая в выделении и фиксации относительно устойчивых, инвариантных свойств объектов, их отношений или способов действий с ними [2]. Мыслительная операция обобщения складывается из таких черт, как всеобщность, универсальность, отнесение тех или иных выводов (следствий) к целому классу сходных ситуаций, применение некоторой схемы решения задачи к совокупности однотипных в некотором смысле задач, умение увидеть одни и те же закономерности в разных ситуациях и использовать поэтому один и тот же (или несколько деформированный) способ решения. Развитие мыслительной операции обобщения ведет к формированию одного из качеств мышления – широты мышления.

Суть же метода математического моделирования заключается в том, что для конкретной задачи из какой-либо области составляется ее математический аналог, называемый математической моделью. Затем методами и средствами математики эта задача-модель решается, после чего результат решения интерпретируется в терминах той конкретной области, из которой вышла первоначальная задача. Вот здесь и проявляется широта мышления. Важно научить школьников умению видеть за конкретными сюжетами математическую основу задачи, т. е. то общее, чем обладает определенный класс задач. Ведь часто задачи имеют разную сюжетную основу, так как они описывают различные объекты, явления или процессы, но одну и ту же математическую структуру, поэтому решаются одним методом. Чтобы построить математическую модель задачи, школьник, используя мыслительную операцию обобщения, должен выделить то абстрактное общее, что является отличительной существенной особенностью всех задач этого класса. В самом процессе моделирования уже заложена операция обобщения. С другой стороны, имея модель конкретной задачи, учащийся распространяет, обобщает, применяет ее к каждой задаче этого класса, решая каждую из них в соответствии со способом, отвечающим данной модели.

Формирование различных мыслительных операций так же, как и использование разных методов в обучении математике направлено на развитие творческих качеств личности обучаемого. Среди этапов творческой деятельности, кратко обозначаемых как наблюдение (фактов), «открытие» (правила, вывода, закона), применение, оценка (применимости) следует обратить внимание на выполнение последнего этапа. Покажем это на примере следующей системы задач.

1. Медную проволоку длиной 80 см необходимо разрезать на 4 равных куска. Сколько разрезов надо сделать?

2. Батон разрезали на три части. Сколько сделали разрезов?

3. Мальчик помогал отцу пилить дрова. Каждое бревно они распиливали на 5 частей. Один распил занимал у них три минуты. Сколько времени им потребовалось, чтобы распилить 4 бревна?

Прежде чем решать первую из приведенных задач, следует использовать метод подводящих задач. Подводящие задачи имеют вид: 1) На отрезке взята точка, сколько частей получилось? 2) На отрезке отмечены две точки. Сколько частей получилось? 3) На отрезке поставлены три точки. Сколько теперь частей?

В процессе работы над такими задачами, обобщая установленную закономерность: 1 точка на отрезке – 2 части, 2 точки – 3 части, 3 точки – 4 части и т. д., дети приходят к выводу: n разрезов – $(n + 1)$ частей. Этот вывод – результат обобщения школьниками эмпирических фактов. Затем, пользуясь операцией конкретизации, учащиеся решают выше приведенные задачи, а также другие задачи этого типа.

Здесь может быть рассмотрен большой набор задач (см., например, [1]) с разной сюжетной основой, решаемых посредством выведенной учащимися закономерности в процессе поиска, организованного учителем, т. е. с использованием созданной модели, а также ее вариаций. Приведем совокупность задач данной категории, содержащую прямые и обратные задачи разного уровня трудности (с использованием буквы, требующие дополнительных вычислений, ответов на дополнительные вопросы и пр.).

4. Пять девочек сделали к празднику 5 гирлянд. Их надо соединить вместе. В скольких местах нужно склеить гирлянды, чтобы получилась одна большая гирлянда?

5. На почтовом ящике написано: «Выемка писем производится 5 раз в день с 7 до 19 час.». И действительно, в первый раз почтальон подходит к ящику в 7 час. утра, а в последний – в 7 час. вечера. Через какие интервалы времени вынимают письма из ящика?

В задачах 6 - 9 запятые разделяют только простые предложения.

6. Сколько простых предложений в сложном предложении, в котором 3 запятые ?

7. Сколько запятых в сложном предложении, в котором четыре простых предложения?

8. Сколько простых предложений в сложном предложении, в котором 5 запятых?

9. Сколько запятых в сложном предложении, в котором 6 простых предложений?

10. Гуляя по улице, Ваня за некоторое время насчитал, что красный свет светофора зажигался 10 раз. Сколько раз за это время, т. е. между первым и последним появлениями красного света, загорался зеленый свет и сколько раз – желтый?

11. Портной имеет кусок сукна в 16 м, от которого он отрезает ежедневно по 2 м. По истечении скольких дней он отрежет последний кусок?

12. Ребята пилят бревна на метровые куски. Отпиливание одного такого куска занимает 1 мин. За сколько минут они распилят бревно длиной 5 м?

13. При посадке яблонь расстояние между рядами составляет 8 м, а между деревьями в ряду – 5 м. Сколько посадили яблонь в саду прямоугольной формы, если длина сада 300 м, а ширина на одну треть меньше, чем длина?

14. «Вот Вам три таблетки, - сказал доктор. – Принимайте по одной через каждые два часа.». Через сколько времени будет принята последняя таблетка?

15. Вдоль участка длиной 100 м поставили столбы для ограды на расстоянии друг от друга в 4 м. Сколько столбов поставили?

16. На прямой через равные промежутки поставили 10 точек. Они заняли отрезок длины l. На другой прямой через такие же промежутки поставили 100 точек, они заняли отрезок длины L. Во сколько раз L больше l?

14. Врач прописал Кате 4 таблетки, указав, что их надо принять через равные промежутки времени в течение полутора часов. Через какие интервалы времени Катя должна принимать таблетки, чтобы выполнить указание врача?

15. Вдоль прямой дороги на расстоянии в 150 м поставили 51 столб. Столбы ставились друг от друга на равном расстоянии. Каком?

16. Таня отметила на прямой подряд 3 точки на расстоянии 3 см одна от другой. Каково расстояние от первой точки до последней?

17. У изгороди, длиной в 20 м и не имеющей поворотов, столб от столба стоят на расстоянии 2 м. Сколько всего столбов?

18. Пятидесятиметровый шнур надо разрезать на полуметровые части. Сколько разрезов надо сделать?

19. Шестиметровый брусок распилили на равные части, сделав при этом 5 распилов. Какой длины получилась каждая часть?

Чтобы реализовать последний этап творческой деятельности – этап оценки применимости математической модели, учащимся следует предложить следующие задачи.

1. Бублик разрезали на 3 части. Сколько сделали разрезов?

2. Колесо имеет 10 спиц. Сколько промежутков между спицами?

3. Минутный круг часового циферблата разделен на 60 равных частей, каждая из которых отмечена точкой. Сколько таких точек на циферблате: 59 или 60?

Учащиеся сначала переносят найденный способ решения и на эти задачи. Однако практическая работа по разрезанию бублика (или его изображения) на 3 части, показала неправомерность такого действия. Создалась творческая ситуация. Выполняется микроисследование, результатом которого является новая закономерность: n разрезов – n частей. Выделяется и класс задач, решаемых по установленному правилу. Учащиеся усваивают, что следует с осторожностью относиться к применению определенного метода к другим задачам. Нужно прежде исследовать, можно ли его применить (проанализировав условие задачи и уточнив факт принадлежности ее к классу задач, для которых построена модель).

При решении специально подобранной системы задач учащиеся овладевают обобщенными способами решения сходных классов задач, претерпевающими определенные изменения при переходе от одного класса к другому. Формирование обобщенного способа действий происходит (независимо от конкретных систем задач) в соответствии со следующими этапами: - решение одной-двух однотипных задач (отличающихся, быть может, числом шагов) (1), - высказывание гипотезы или множества гипотез (разными учениками и нескольких гипотез одним учеником) (2), - проверка высказанной гипотезы на подобных задачах (того же типа) (3), - решение (с использованием гипотетического положения) одной или нескольких модифицированных задач (требующих, например, изменения хода мысли на обратный) (4), - попытка расширить границы применимости (решение внешне похожих задач, но различающихся существенно) (5), - уточнение, изменение гипотезы (6), - выработка обобщенного (видоизмененного) способа действий (с учетом специфических особенностей каждой задачи) (7), - применение обобщенного способа действий к расширенному классу задач (8).

Описанную последовательность осознанных действий учащихся можно проследить применительно к набору приведенных ниже задач 1 – 8.

1. Найдите сумму всех однозначных чисел самым легким способом.
2. Рассадите 45 кроликов в 9 клеток так, чтобы во всех клетках было разное число кроликов.
3. В квадрат 9 × 9 клеток разместите числа от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел каждой строки и каждого столбца была равна 45.
4. Сложите числа 1, 2, 3, …, 20 (задача маленького Гаусса).

5. Чему равна сумма нечетных чисел: а) от 1 до 99; б) от 1 до 999?
6. Вычислите: 99 – 97 + 95 – 93 + … + 7 – 5 + 3 – 1.
7. Сколькими способами можно представить число 10 в виде суммы четырех нечетных чисел?
8. Сколькими способами можно представить число 50 в виде суммы двух четных чисел? (Порядок не учитывать).

С целью выполнения п. 1 решается задача 1, при необходимости еще задача 5а.

В ходе их решения как реализация п. 2 высказывается гипотеза о том, что удобно находить сумму чисел данного ряда, группируя равноудаленные числа от концов ряда (получаем пары чисел, дающих в сумме один и тот же результат), затем сумму чисел такой пары умножаем на число таких сумм (пар).

В подтверждение п. 3 решается задачи 4, 5б.

Осуществляя п. 4, предлагаем учащимся решить задачи 2, 3. Желая быстро справиться с решением задачи 6, учащиеся терпят неудачу, применяя к ней «открытый» ими способ.

Наблюдение показывает учащимся, что все-таки надо как-то применить метод группировки парами – но как? Поиск (п. 5) приводит их к некоторому изменению гипотезы (п. 6): удобно группировать в пару два соседние числа ряда, так как они дают после применения арифметической операции один и тот же результат. Следующий шаг такой же, как в первых задачах: умножаем результат на число выбранных определенным образом пар чисел.

Учащиеся получают несколько измененный способ решения по сравнению с первоначальным. Учащиеся понимают, что выводы не являются верными в любой сходной ситуации, им свойственно изменяться при переходе к деформированному типу задач, даже внешне похожему на первоначальный. Однако одно в обоих способах неизменно: рассматривается удобный способ группировки, а особенности группировки обуславливаются своеобразием задачи. Тем самым реализован п. 7.

Наконец, для осуществления п. 8, решаются задачи 7, 8. Для облегчения нахождения способа решения задачи 8 учащимся приходится ее переформулировать: сколько пар четных чисел, меньших 50, в сумме дают 50? Какие это пары? Дети рассуждают теперь так: 0, 2, …, 48, 50 – чисел 26, пар 13, значит, 13 способов.

В процессе решения таких задач учащиеся приобретают умение наблюдать, устанавливать закономерность, обобщать, делать выводы, использовать данный метод в другой ситуации. При этом они убеждаются, что буквальный перенос способа деятельности не всегда приводит к цели, не всегда возможен. Их поиски обогащаются видоизмененным методом. Таким образом, при переходе от задачи к задаче учащиеся приобретают навыки самостоятельного поиска путей решения, творческого подхода к делу, так как дополнительный шаг к получению решения задачи по сравнению с предыдущей небольшой и вполне им доступен.

Пункты 5-8 этапов формирования обобщенного (видоизмененного) способа действий являются характерными для решения проблемы развития творческих качеств личности младшего школьника. Обычно в поисковой ситуации содержание этих пунктов не реализуется.

Сделать обобщение, построить математическую модель ситуации учащимся легче, если им предлагаются для такой работы «прозрачные» по сюжету задачи. Вряд ли школьники не испытают затруднений, если предложить им следующую задачу.

В коробке лежит 120 цветных карандашей: 35 красных, 23 зеленых, 14 желтых, 26 синих, 11 коричневых и 11 черных. Какое наименьшее число карандашей надо взять из коробки в темноте (не видя карандашей), чтобы среди них определенно оказалось не менее 18 карандашей одного цвета?

Между тем, если вести учеников от пропедевтических задач этого класса, то эта и подобные задачи будут решаться школьниками согласно выведенному обобщенному правилу, согласно найденной модели решения. Приведем совокупность задач этой серии.

1. В саду распустилось 15 астр и 17 георгинов. Девочка сорвала 16 цветов из них. Ответь: был ли среди них хотя бы один георгин? Была ли среди них хотя бы одна астра?

2. В коробке лежат 4 цветных карандаша и 10 простых. Из этой коробки берут наугад несколько карандашей. Какое наименьшее число карандашей надо взять из коробки, чтобы среди

них оказалось не менее:

а) двух цветных;

в) трех простых?

3. В коробке 2 синих и 3 красных карандаша. Сколько нужно взять из коробки карандашей, чтобы среди них были 2 карандаша одного цвета?

4. В корзине 4 груши и 3 яблока. Какое минимальное количество фруктов надо вынуть из корзины не глядя, чтобы:

а) среди них было два яблока,

б) два одинаковых фрукта,

в) три груши,

г) два разных фрукта?

5. В коробке лежат карандаши: 4 красных и 3 синих. В темноте берут карандаши. Сколько надо взять карандашей, чтобы среди них было не менее одного синего?

6. У Коли 4 карандаша: 2 красных и 2 синих. Коля хочет вынуть из портфеля красный карандаш. Сколько он должен взять карандашей, чтобы среди них обязательно был красный?

7. В бумажном кульке лежат конфеты двух сортов. Наугад берут несколько конфет. Какое наименьшее количество конфет нужно взять, чтобы среди них оказались хотя бы две конфеты одного сорта?

8. В сумке лежат 5 красных и 5 черных кружков. Какое наименьшее число кружков надо взять из сумки, чтобы среди них обязательно оказался хотя бы один красный кружок?

9. В коробке лежат карандаши: 7 красных, 5 синих. В темноте берут карандаши. Сколько надо взять карандашей, чтобы среди них было не меньше двух красных и не меньше трех синих?

10. В ящике перемешали 15 белых и 5 черных шаров. Какое наименьшее число шаров надо вытащить из ящика, чтобы среди них был хотя бы один белый шар?

Мы вытащили 10 шаров. Можем ли мы быть уверены, что среди них окажется хотя бы один черный шар; хотя бы один белый?

11. В темной кладовой лежат ботинки одного размера: 10 пар черных и 10 пар коричневых. Определить наименьшее число ботинок, которое нужно взять из кладовой, чтобы среди них

оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета (считать, что в темноте нельзя определить не только цвет ботинка, но и левый от правого).

12. В темной комнате в ящике лежат перчатки одного размера: 10 пар белых, 5 пар черных, 7 пар синих. Какое количество перчаток надо вынуть из ящика, чтобы среди них заведомо оказалась пара белых перчаток?

Эти задачи позволяют обратить внимание детей на встречающиеся в них слова и группы слов: хотя бы, не менее, обязательно, заведомо, определенно, пара и другие. Понимание учащимися этих слов и словосочетаний подготовит их к построению правильных умозаключений и адекватному использованию правил рассуждений. Эти умения очень пригодятся им в последующих классах школы и в жизни. Решение же задач этой серии, как нетрудно видеть, происходит по одной модели: исключается число неблагоприятных случаев, только ученик должен ясно представлять себе, какие из вариантов являются неприемлемыми в соответствие с требованиями той или иной задачи.

Переходя в своих рассуждениях от простых задач к более сложным, представленным в этой совокупности, школьники приходят к решению первой сформулированной задачи. Действительно, чтобы взять из коробки, не видя, не менее18 карандашей одного цвета, надо реализовать все неблагоприятные варианты с карандашами тех цветов, число которых в группе каждого цвета меньше 18. Это 11 черных карандашей, 11 коричневых, 14 желтых – всего 36 карандашей. Кроме того, это еще по 17 карандашей тех цветов, число которых в группах соответствующих цветов превосходит 17. Это еще 17 красных, 17 зеленых, 17 синих, т. е. 51 карандаш. Только выбрав 87 (это 36 + 51) карандашей, при извлечении одного следующего карандаша получим 18-й одного и того же цвета карандаш из цветов: красный, зеленый, синий, т. е. один из этих цветов повторится 18-й раз. Отсюда вывод, что должно быть извлечено 88 карандашей. При этом удовлетворяется и требование «не менее». В самом деле, при вынутых из коробки 88 карандашах получаем 18 карандашей одного цвета. Но этот ответ получен для самого неблагоприятного варианта, т. е. если мы извлекаем все карандаши тех цветов, которых никак не может быть среди вынутых 18 штук (их количество меньше в коробке по условию). Однако может сложиться ситуация, когда не обязательно попадают под руку только карандаши этих групп, и тогда среди вынутых 88 карандашей синих, зеленых или красных может оказаться более, чем 18. Это и означает, что среди извлеченных 88 карандашей находится не менее 18 карандашей одного и того же цвета.

Как мы видели выше, при решении первой или второй групп задач («на разрезание») математическая модель решения задачи была выражена с помощью четкой математической зависимости (n разрезов – (n+1) кусков, или n разрезов – n кусков), при решении последней группы задач модель состоит в правиле (руководстве к действию), полученном в результате обобщения пути решения нескольких первоначальных (более простых) задач. Кроме того, модель решения может быть найдена в графическом виде. Приведем совокупность таких задач.

1. Папа с двумя сыновьями отправился в поход. На их пути встретилась река. У берега – плот. Он выдерживает на воде только папу или двух сыновей. Как переправиться на другой берег папе и сыновьям?

2. Трем неутомимым путешественникам надо было переправиться на лодке, выдерживающей массу не более 100 кг, с одного берега реки на противоположный. Андрей знал результат своего недавнего взвешивания – 54 кг и своего друга Олега – 46 кг. Зато дядя Миша имел массу 98 кг. Как им надо действовать наиболее рациональным образом, чтобы переправиться через реку?

3. Некий человек должен был перевезти в лодке через реку волка, козу и капусту. В лодке мог поместиться только один человек, а с ним или волк, или коза, или капуста. Но если оставить волка с козой без человека, то волк съест козу. Если же оставить козу с капустой, то коза съест капусту. В присутствии человека никто никого не ест. Человек перевез свой груз через реку. Как он это сделал?

Модель решения задачи 1 можно представить схематически так:

псс
п ——— сс,
пс ——— с,
с ——— пс,
сс ——— п,
псс.

Вторая задача решается согласно этой модели, т. е. первые две из приведенных задач имеют одну и ту же математическую модель, а последняя – несколько деформированную, так как сюжет третьей задачи усложнен дополнительными условиями.

Из рассмотренных классов задач видно, что овладение учащимися способом решения задач каждого класса происходит по определенным этапам. Сначала происходит обобщение некоторых частных рассуждений, относящихся к конкретным задачам, приводящее к созданию некоторой модели, а затем применение уже известного способа решения (или деформированного), т. е. модели, к новым задачам тех же классов.

Литература.

1. Аммосова Н.В. Основные аспекты подготовки школьников к математическим олимпиадам. Методические рекомендации. – Астрахань, 1995. - 17 с.
2. Артемов А.К., Семенова Т.В. Введение в частные методики обучения: Учебное пособие. - Пенза: Пенз. политех. ин-т, 1982.- 76 с.